2017年南师附中特长生数学真题

保留题目分组与原题号。

数学部分

1. 函数 · 二次函数与整数解

已知函数 $y=(a+1)x^2+x+\frac{1}{4}(1-a)$，其中 a 是常数。

（1）求证：该函数图像与 x 轴必有公共点；

（2）求证：无论 a 取何值，该函数图像始终经过一个不在 x 轴上的定点；

（3）若 a 是整数，且该函数图像与直线 $y=7$ 存在横坐标为整数的交点，求 a 的值。

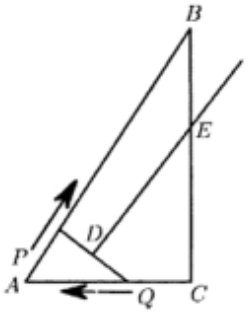
2. 几何 · 动点与分类讨论

如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=5$，$AB=13$。点 P 从 A 出发，沿线段 AB 以每秒 1 个单位长度的速率向 B 匀速运动；点 Q 从 C 出发，以每秒 1 个单位长度的速率沿线段 CA 来回做匀速运动，端点处不停留。伴随 P,Q 运动，直线 DE 始终垂直平分 PQ，交 PQ 于 D，交折线 $PB-BC-CQ$ 于 E。两点同时出发，当 P 到达 B 时同时停止。设运动时间为 t 秒，$t>0$。

（1）当 $t=5$ 时，点 E 经过的路程是多少？

（2）当 $t\leqslant 6$ 时，求 $\triangle APQ$ 面积 S 的最大值，并写出此时的 t；

（3）运动过程中，四边形 $PBED$ 能否成为直角梯形？若能，求所有可能的 t；若不能，说明理由。



3. 数论 · 勾股数

在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A,\angle B,\angle C$ 所对边的长度分别记为 a,b,c，且 a,b,c 均为正整数。

（1）求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的最大值；

（2）求证：a,b 中一定存在偶数；

（3）若 a,b 互质，求满足题意的所有可能的 a,b,c。

4. 新定义 · 运算性质

定义新运算“$*$”，已知对非零实数 x, y, z，都有：

① $x * x = 1$；

② $x * (y * z) = (x * y) \cdot z$，其中“$\cdot$”为通常的乘法。

试证明“$*$”是除法，即 $x * y = x / y$。

5. 不等式 · 极值比较

用 $\max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$、$\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 分别表示这些数中的最大值、最小值。把任意 n^2 个互不相等的实数排成 n 行 n 列的数阵，其中 $n \geqslant 3$ 且为正整数，用 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的数。设

$A_i = \max\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}\}$，$B_i = \min\{a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}\}$，

$M = \min\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，$N = \max\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$。

判断 M, N 的大小关系并说明理由；若两者能够相等，指出等号成立的条件。

信息加试

6. 数论 · 整除与枚举

两个正整数的积与它们的和之差，等于这两个数最大公约数与最小公倍数之和的 3 倍。求这两个数。

7. 方程 · 整数解

已知 $\frac{x+2y}{x^2-xy+2y^2} = \frac{5}{7}$，求 x, y 的整数解。