# 参考答案

2017年南师附中特长生数学真题

## 数学部分

### 1. 函数 · 二次函数与整数解

（1）恒过 $(-\frac{1}{2},0)$；（2）定点为 $(\frac{1}{2},1)$；（3）$a=-27$ 或 $9$。

把函数写成 $y=a(x^2-\frac{1}{4})+x^2+x+\frac{1}{4}$。代入 $x=-\frac{1}{2}$ 得 $y=0$，故总与 $x$ 轴相交；代入 $x=\frac{1}{2}$ 得 $y=1$，故恒过定点 $(\frac{1}{2},1)$。

令 $y=7$，整理得 $(2x+1)[a(2x-1)+(2x+1)]=28$。两个因式均为整数，且 $2x+1$ 为奇数，所以 $2x+1$ 只能取 $1,-1,7,-7$。

分别得到 $(x,a)=(0,-27),(-1,9),(3,-\frac{3}{5}),(-4,-\frac{1}{3})$。由 $a$ 为整数，得 $a=-27$ 或 $9$。

### 2. 几何 · 动点与分类讨论

（1）$\frac{143}{8}$；（2）$S_{\max}=\frac{75}{26}$，此时 $t=\frac{5}{2}$；（3）能，$t=\frac{25}{18},\frac{65}{18},\frac{65}{8},\frac{65}{6}$。

由勾股定理得 $BC=12$。在 $0<t\leqslant 5$ 内，$E$ 从 $AB$ 的中点出发，沿 $PB$ 移到 $B$，再沿 $BC$ 向下移动。当 $E=B$ 时，$BP=BQ$，即 $(13-t)^2=12^2+t^2$，得 $t=\frac{25}{26}$。

取 $A=(0,0),C=(5,0),B=(5,12)$。当 $t=5$ 时，$Q=A$，$P=(\frac{25}{13},\frac{60}{13})$。设 $E=(5,e)$，由 $EP=EA$ 得 $e=\frac{5}{8}$，所以总路程为 $\frac{13}{2}+12-\frac{5}{8}=\frac{143}{8}$。

点 $P$ 到 $AC$ 的距离为 $\frac{12t}{13}$。在 $0<t\leqslant 5$ 时，$AQ=5-t$，故 $S=\frac{6}{13}t(5-t)=-\frac{6}{13}(t-\frac{5}{2})^2+\frac{75}{26}$。在 $5<t\leqslant 6$ 时，$AQ=t-5$，故 $S=\frac{6}{13}t(t-5)\leqslant\frac{36}{13}<\frac{75}{26}$。因此最大值为 $\frac{75}{26}$，此时 $t=\frac{5}{2}$。

非退化时 $E$ 在 $BC$ 上。因 $PD\perp DE$，直角梯形只有两种情形：$PD\parallel BC$，相似关系给出 $AP/AQ=13/5$；或 $DE\parallel AB$，即 $PQ\perp AB$，相似关系给出 $AP/AQ=5/13$。

$AP=t$，而 $AQ$ 在 $0<t\leqslant 5$、$5<t\leqslant 10$、$10<t<13$ 三段内分别为 $5-t,t-5,15-t$。

代入两种比例并核对时间范围，依次得 $t=\frac{25}{18},\frac{65}{18},\frac{65}{8},\frac{65}{6}$。

### 3. 数论 · 勾股数

（1）$\frac{47}{60}$；（2）至少一条直角边为偶数；（3）$a=2mn,b=m^2-n^2,c=m^2+n^2$，或交换 $a,b$；其中 $m>n>0$，$m,n$ 为互质且一奇一偶的整数。

不妨设 $a<b<c$。若最短边为 $1$ 或 $2$，由 $a^2=(c-b)(c+b)$

及两因子同奇偶可知不可能构成正整数直角三角形。因此 $a\geqslant 3,b\geqslant 4,c\geqslant 5$，倒数和不超过 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}$；$3,4,5$ 时取等号。

若 $a,b$ 都为奇数，则 $a^2,b^2$ 除以 $4$ 都余 $1$，故 $c^2=a^2+b^2$ 除以 $4$ 余 $2$，

不可能。故至少一条直角边为偶数。

互质条件排除了两条直角边都为偶数。不妨令 $a$ 为偶数，则 $b,c$ 为奇数，且 $((c+b)/2)((c-b)/2)=(a/2)^2$。这两个正整数互质，乘积为平方数，故各自都是平方数。设

$\frac{c+b}{2}=m^2,\frac{c-b}{2}=n^2$，得 $a=2mn,b=m^2-n^2,c=m^2+n^2$。

其中 $m>n>0$、$m,n$ 互质；若两者同为奇数，则三边都有公因数 $2$，

故必须一奇一偶。反过来，这些条件生成的三边均满足题意；还可以交换两条直角边。

**4. 新定义 · 运算性质**

$x*y=\frac{x}{y}$。

在②中令 $x=y=z$，由①得 $x*1=(x*x)x=x$。

在②中令 $z=y$，得 $x*1=(x*y)y$。结合 $x*1=x$，并利用 $y\neq 0$，得 $x*y=x/y$。

**5. 不等式 · 极值比较**

$M\geqslant N$；等号成立当且仅当数阵中有一个数，既是所在行的最大值，又是所在列的最小值。

设 $M=A_p$、$N=B_q$。由第 $p$ 行的最大值和第 $q$ 列的最小值定义，有 $M=A_p\geqslant a_{pq}\geqslant B_q=N$，故 $M\geqslant N$。

若 $M=N$，则上述两处不等式都取等号，所以 $a_{pq}$ 同时是所在行最大值、所在列最小值。反之，若某个数 $a_{pq}$ 具有这两个性质，则 $M\leqslant A_p=a_{pq}=B_q\leqslant N$，结合 $M\geqslant N$ 得 $M=N$。

## 信息加试

**6. 数论 · 整除与枚举**

不计顺序，共四组：$(8,8),(6,12),(5,20),(8,20)$。

设两数为 $dm,dn$，其中 $d$ 是最大公约数，$m,n$ 互质，不妨 $m\geqslant n$。最小公倍数为 $dmn$。原条件化为 $mn(d-3)=m+n+3$，所以 $d>3$，且 $mn\leqslant m+n+3$，即 $(m-1)(n-1)\leqslant 4$。

由 $m\geqslant n$，只需考虑 $n=1,2,3$。当 $n=1$ 时，$d=4+4/m$，故 $m=1,2,4$；当 $n=2$ 时，$m$ 为奇数且 $2\leqslant m\leqslant 5$，只有 $m=5$ 使 $d$ 为整数；当 $n=3$ 时，范围迫使 $m=3$，不互质。

对应 $(m,n,d)=(1,1,8),(2,1,6),(4,1,5),(5,2,4)$，还原并核验得 $(8,8),(6,12),(5,20),(8,20)$。

**7. 方程 · 整数解**

$x=1,y=2$。

交叉相乘得 $5x^2-(5y+7)x+10y^2-14y=0$。判别式须非负，即 $-175y^2+350y+49\geqslant 0$，化为 $25(y-1)^2\leqslant 32$。因此整数 $y$ 只可能是 $0,1,2$。

$y=0$ 时，$x=0$ 或 $7/5$，前者使原分母为 $0$，后者不是整数；$y=1$ 时，方程 $5x^2-12x-4=0$ 无整数根；$y=2$ 时，$(x-1)(5x-12)=0$，得到唯一整数解 $x=1,y=2$。