参考答案

2018年南师附中特长生数学真题

基础部分

1. 实数 · 绝对值

-1。

$1-a\geqslant 0$，所以 $a\leqslant 1$。于是原式 $=(2-a)-(3-a)=-1$。

2. 二次根式 · 配方

$\sqrt{3}-1$。

$13+\sqrt{48}=13+4\sqrt{3}=(2\sqrt{3}+1)^2$，故原式 $=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1$。

3. 不等式 · 整数解

$-\frac{3}{2}<a\leqslant -1$。

要包含 -2 而不包含 -1，需 $-2<2a+1\leqslant -1$，解得 $-\frac{3}{2}<a\leqslant -1$。

4. 整式 · 整体代入

7。

由 $(a+1)^2=3$ 得 $a^2+2a=2$。原式 $=(2a+1)(a^2+2a)-4a+5=2(2a+1)-4a+5=7$。

5. 几何 · 旋转与面积

$\frac{7}{6}$。

将 $\triangle ADF$ 绕 A 顺时针旋转 90°，得到 $\triangle ABG$，其中 G 在 CB 的延长线上。由 $\angle EAF=45^\circ$，得 $\angle GAE=45^\circ$；又 $AG=AF$、AE 公共，所以 $\triangle AEG\cong\triangle AEF$。

因此 $EG=EF$，且 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle AEG}=\frac{1}{2}EG\cdot AB=\frac{1}{2}EF\cdot AB$。于是 $\frac{7}{3}=\frac{AB^2}{EF\cdot AB/2}=\frac{2AB}{EF}$，所以 $\frac{AB}{EF}=\frac{7}{6}$。

6. 反比例函数 · 坐标与面积

$\frac{3}{8}$。

设 $C(t,0)$，其中 $t>0$。则 $F(t,\frac{1}{2t})$；由 $BF=CF$，得 $B(t,\frac{1}{t})$、$E(\frac{t}{2},\frac{1}{t})$。

矩形面积为 1，而 $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{4}$，$S_{\triangle DCF}=\frac{1}{4}$，$S_{\triangle BEF}=\frac{1}{8}$。故 $S_{\triangle DEF}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$。

7. 方程组 · 换元

$x=3$，$y=5$。

设 $u=\sqrt{x+6}$，$v=\sqrt{y+11}$，则 $u+v=7$，且 $u^2-v^2=x-y-5=-7$，所以 $u-v=-1$。解得 $u=3,v=4$，故 $x=3,y=5$，代回原方程组成立。

8. 二次函数 · 分类讨论

当 $t\leqslant -1$ 时，最小值为 t^2+2t+6；当 $-1<t<1$ 时，最小值为 5；当 $t\geqslant 1$ 时，最小值为 t^2-2t+6。

$y=(x-1)^2+5$。当 $t+2\leqslant 1$ 时，在右端点 $x=t+2$ 取最小值 t^2+2t+6；当 $t<1<t+2$ 时，在 $x=1$ 取最小值 5；当 $t\geqslant 1$ 时，在左端点 $x=t$ 取最小值 t^2-2t+6。

9. 几何 · 角平分线与相似

$\frac{1}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$。

过 B 作 $BE\parallel AD$，交 CA 的延长线于 E；过 C 作 $CF\parallel AD$，交 BA 的延长线于 F。由相似三角形，得 $\frac{AD}{BE}=\frac{CD}{CB}$、$\frac{AD}{CF}=\frac{BD}{BC}$。相加得 $\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}=\frac{1}{AD}$。

$\angle BAD=\angle DAC=60^\circ$，所以 $\triangle ABE$、$\triangle ACF$ 均为等边三角形，故 $BE=AB$、$CF=AC$。

代入即得结论。

数学加试

10. 方程组 · 倒数换元

3。

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{5}{6}$，$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{8}{15}$，$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{7}{10}$。解得 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{b}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{c}=\frac{1}{5}$，即 $a=2,b=3,c=5$。

$\frac{abc}{a+b+c}=\frac{2\times 3\times 5}{2+3+5}=3$。

11. 整式 · 因式分解

（1）$(a+1)(a+3)(a+5)(a-1)$；（2）$(x-3y+5)(x+2y-3)$。

（1）令 $u=a^2+4a-1$，则原式

$=(u+3)(u-3)-7=u^2-16=(a^2+4a+3)(a^2+4a-5)=(a+1)(a+3)(a+5)(a-1)$。

（2）原式 $=x^2+(-y+2)x+(-3y+5)(2y-3)=(x-3y+5)(x+2y-3)$。

12. 一元二次方程 · 根与函数图象

（1）$a=-1,b=-3$；（2）$-2<x_1<1<x_2$。

（1）由 $\alpha+\beta=-\frac{4}{a}$、$\alpha\beta=\frac{b}{a}$，得 $4=(\alpha-\beta)^2=\frac{16}{a^2}-\frac{4b}{a}$，即 $a(a+b)=4$。令 $a=-m,b=-n$，其中 m,n 为正整数，则 $m(m+n)=4$，只能有 $m=1,n=3$，故 $a=-1,b=-3$。

（2）记 $f(x)=ax^2+4x+b$，$g(x)=ax^2+6x+b$。因 $a<0$ 且 $\alpha<1<\beta<2$，有 $f(1)>0$、$f(2)<0$。于是 $g(-2)=f(2)-20<0$，$g(1)=f(1)+2>0$。又 g 的抛物线开口向下，所以 $-2<x_1<1<x_2$。

13. 实数 · 根式与有理数证明

$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 都是有理数。

在实数范围内，$a,b,c\geqslant 0$。设 $t=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$。若 $t=0$，三项均为 0，结论成立。以下设 $t>0$；值为 0 的根式本身已是有理数。

若 $c>0$，令 $A=\frac{t^2+c-a-b}{2}$。由 $t-\sqrt{c}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，平方整理得 $\sqrt{ab}=A-t\sqrt{c}$。其中 $A=c+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}>0$，且 A 为有理数。

再平方得 $ab=A^2+t^2c-2At\sqrt{c}$，所以 $\sqrt{c}=\frac{A^2+t^2c-ab}{2At}$ 为有理数。同理，每个非零的 $\sqrt{a},\sqrt{b}$ 都可如此证明，故三者均为有理数。