参考答案

2019年南师附中特长生数学真题

数学部分

1. 方程 · 因式分解

$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$。

原式可分解为 $(x^2-3x+1)(2x^2-x+2)=0$。其中 $2x^2-x+2$ 的判别式为 $1-16=-15<0$，故只需求解 $x^2-3x+1=0$，得到两个实根 $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$。

2. 二次根式 · 化简

$1+\sqrt{3}$。

$4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$，且 $\sqrt{3}+1>0$，所以原式为 $\sqrt{3}+1$。

3. 二次根式 · 化简

$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$。

$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$。

4. 不等式 · 参数讨论

当 $m<\frac{7}{4}$ 时，x 为任意实数；当 $m=\frac{7}{4}$ 时，$x\neq\frac{2}{7}$；当 $m>\frac{7}{4}$ 时，$x<\frac{1-\sqrt{4m-7}}{2m}$ 或 $x>\frac{1+\sqrt{4m-7}}{2m}$。

整理为 $m^2x^2-mx+2-m>0$。当 $m=0$ 时化为 $2>0$，对一切实数 x 成立。

当 $m\neq0$ 时，二次项系数为正，判别式 $\Delta=m^2(4m-7)$。若 $m<\frac{7}{4}$，则 $\Delta<0$，不等式恒成立；若 $m=\frac{7}{4}$，除重根 $x=\frac{2}{7}$ 外均成立；若 $m>\frac{7}{4}$，两根为 $\frac{1\pm\sqrt{4m-7}}{2m}$，解在两根外侧。

5. 二次函数 · 区间最值

最小值：$a\leqslant0$ 时为 a^2+2；$0<a<1$ 时为 2；$a\geqslant1$ 时为 a^2-2a+3。最大值：$a\leqslant\frac{1}{2}$ 时为 a^2-2a+3；$a>\frac{1}{2}$ 时为 a^2+2。

$y=(x-1)^2+2$。当区间在对称轴左侧，即 $a\leqslant0$，在右端点取最小值 a^2+2；当 $0<a<1$，顶点在区间内，最小值为 2；当 $a\geqslant1$，在左端点取最小值 a^2-2a+3。

两个端点的函数值分别为 $f(a)=a^2-2a+3$、$f(a+1)=a^2+2$，其差为 $1-2a$。按 a 与 $\frac{1}{2}$ 的大小比较，即得最大值。

6. 反比例函数 · 坐标几何

2。

按图中位置，设 $A(t,\frac{2}{t})$，其中 $t>0$。正方形边长为 $\frac{2}{t}$，故中心 B 的坐标为 $(t+\frac{1}{t},\frac{1}{t})$。

B 也在图像上，所以 $(t+\frac{1}{t})\frac{1}{t}=2$，解得 $t^2=1$。取 $t=1$，点 B 的横坐标为 $t+\frac{1}{t}=2$。

7. 几何 · 角平分线与相似

$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$。

过 C 作 $CE\parallel AD$，交 AB 于 E。由外角平分线及平行线的角关系，得 $\angle AEC=\angle ACE$，所以 $AE=AC$。

由 $\triangle BCE\sim\triangle BDA$，得 $\frac{BE}{BA}=\frac{BC}{BD}$。两边用 1 减去，得 $\frac{AE}{AB}=\frac{CD}{BD}$，代入 $AE=AC$ 即证。

8. 圆 · 内切圆半径

$\frac{12}{5}$。

因 $3^2+4^2=5^2$，得 $\angle BAD=90^\circ$。由面积及相似，$AC=\frac{12}{5}$、$BC=\frac{16}{5}$、$CD=\frac{9}{5}$。

直角三角形的内切圆半径等于两直角边之和减斜边的一半。因此三个半径依次为 $\frac{4}{5}$、$\frac{3}{5}$、1，和为 $\frac{12}{5}$。

9. 数论 · 因数分解

$(-7,-71)$、$(-9,103)$、$(-6,-29)$、$(-10,61)$、$(35,-29)$、$(-51,61)$、$(78,-71)$、$(-94,103)$。

$m=-8$ 时原式矛盾，故 $m\neq-8$。由 $(m+8)n=-(m^2+22)$，得 $n=8-m-\frac{86}{m+8}$。所以 $m+8$ 必须是 86 的整数因数。

$m+8=\pm1,\pm2,\pm43,\pm86$，逐一代入即得上述 8 组整数解。

数学加试

10. 整式 · 因式分解

（1）$(2x+y-2)(x-2y+1)$；（2）$(x-2)^2(x^2+x+1)$。

将原式写为 $2x^2+(-3y)x-2y^2+5y-2$，其中 $-2y^2+5y-2=(y-2)(-2y+1)$，交叉项和为 $-3xy$，得 $(2x+y-2)(x-2y+1)$。

$x^4-3x^3+x^2+4=(x^2-4x+4)(x^2+x+1)=(x-2)^2(x^2+x+1)$。

11. 分式 · 整体代入

$\frac{m^2}{1-2m}$。

记 $D=x^2+x+1$。则 $x^4+x^2+1=D^2-2xD=D^2(1-2m)$，而 $x^2=m^2D^2$。相除得所求值 $\frac{m^2}{1-2m}$；

原分母恒正，故这里 $1-2m\neq0$。

12. 数论 · 不定方程

$(-16,4)$、$(10,-10)$、$(10,4)$、$(-16,-10)$、$(-6,0)$、$(0,-6)$、$(0,0)$、$(-6,-6)$。

配方得 $(x+3)^2-4(y+3)^2=-27$，即 $(x+2y+9)(x-2y-3)=-27$。

设两因子依次为 u, v，则 $uv=-27$，且 $x=\frac{u+v-6}{2}$、$y=\frac{u-v-12}{4}$。取
$(u,v)=(1,-27),(-1,27),(27,-1),(-27,1),(3,-9),(-3,9),(9,-3),(-9,3)$，得到上述 8 组整数解。

13. 数论 · 无理数与整式

$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}=a-b+c$，所以它是整数。

分母有理化得 $\frac{(2ab-bc)+(b^2-ac)\sqrt{2}}{2b^2-c^2}$。原分式有意义，且 b, c 是整数，所以 $2b^2-c^2\neq 0$。

由该分式为有理数，必有 $b^2=ac$。

若 $a+b+c=0$，则 $b^2=a(-a-b)$，即 $(2a+b)^2+3b^2=0$，从而 $a=b=c=0$，
与原分式有意义矛盾。因此 $a+b+c\neq 0$。由 $b^2=ac$，得 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)(a-b+c)$，
约去即得整数 $a-b+c$。