参考答案

2020年南师附中特长生数学真题

数学部分

1. 整式 · 完全平方公式

2。

由 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$，得 $9=5+2(ab+bc+ac)$，所以 $ab+bc+ac=2$。

2. 整式 · 因式分解

$(x+2y-1)(x+3y+1)$。

原式 $=(x+2y)(x+3y)+(x+2y)-(x+3y)-1$，提取公因式，得 $(x+2y-1)(x+3y+1)$。

3. 方程 · 换元与因式分解

$x=-1-\sqrt{2}$ 或 $x=-1+\sqrt{2}$。

令 $t=x+1$，则 $(t-3)^4+(t+3)^4=386$。展开得 $t^4+54t^2-112=0$。

$(t^2-2)(t^2+56)=0$。因 t 为实数，故 $t^2=2$，即 $x=-1\pm\sqrt{2}$。

4. 一元二次方程 · 根与系数

$m=-2$ 或 $m=-\frac{2}{7}$。

若 $m=0$，根为 $0,-1$，不能满足所给比值，故 $m\neq 0$。由 $x_1x_2=-\frac{9}{2}m^2<0$，两根异号，所以 $x_2=-2x_1$。

$x_1+x_2=-2m-1$，故 $x_1=2m+1$。再由 $-2x_1^2=-\frac{9}{2}m^2$，得 $4(2m+1)^2=9m^2$，即 $(m+2)(7m+2)=0$。

解得 $m=-2$ 或 $m=-\frac{2}{7}$，代入均有两个非零异号实根，且根的绝对值之比为 2。

5. 圆 · 切割线与相似

$PB\cdot CH=PC\cdot BH$。

连接 OA,OB,OC。切线性质给出 $PA\perp OA$，由 $\triangle PAH\sim\triangle POA$ 得 $PA^2=PO\cdot PH$。又由切割线定理，$PA^2=PB\cdot PC$，所以 $PO\cdot PH=PB\cdot PC$。

由 $PB/PO=PH/PC$，且 $\angle BPH=\angle OPC$，得 $\triangle PBH\sim\triangle POC$。因此 $BH/OC=PH/PC$，即 $PC\cdot BH=PH\cdot OC$。

同理，由 $PB/PH=PO/PC$ 及 $\angle BPO=\angle HPC$，得 $\triangle PBO\sim\triangle PHC$，故 $PB\cdot CH=PH\cdot OB$。因 $OB=OC$，合并得 $PB\cdot CH=PC\cdot BH$。

6. 数论 · 奇偶与质因数分解

$r=5$。

因 r 为奇数，a,b 一奇一偶，不妨设 a 偶、b 奇，则 $p=2$。a^2 除以 3 余 1；若 b 不是 3 的倍数，则 b^2 除以 3 也余 1，使 r^2 除以 3 余 2，矛盾。故 $q=3$。

于是 $(r-2^m)(r+2^m)=3^{2n}$。两个因数均为正奇数，差为 2^{m+1}，不能同时被 3 整除，因此 $r-2^m=1$、$r+2^m=3^{2n}$。

相减得 $2^{m+1}=3^{2n}-1=(3^n-1)(3^n+1)$。右边两因数都是 2 的正整数次幂，且相差 2，故只能为 $2,4$。所以 $n=1$、$m=2$，从而 $r=2^m+1=5$。

7. 数论 · 正整数解

$(x,y)=(3,9),(4,6),(5,5),(8,4)$。

去分母得 $xy-3x-2y=0$，即 $(x-2)(y-3)=6$。由原式两项均为正数，得 $x>2,y>3$。

$(x-2,y-3)$ 可为 $(1,6),(2,3),(3,2),(6,1)$，故 (x,y) 依次为 $(3,9),(4,6),(5,5),(8,4)$。