参考答案

2021年南师附中特长生数学真题

综合卷数学

1. 二次根式 · 化简

$-a-1$。

因 $0<a<1$，有 $\sqrt{a^2+a^{-2}-2}=|a-a^{-1}|=a^{-1}-a$。

原式 $=\frac{1-a^2}{a}\cdot\frac{a}{a-1}=-(a+1)=-a-1$。

2. 坐标与图形 · 旋转

$(7,3)$。

从 B 到 A 的坐标增量是 $(-1,2)$。按图中方向旋转 90° 后为 $(2,1)$，放大为 3 倍得 $(6,3)$，所以 $C=(1+6,0+3)=(7,3)$。

3. 圆 · 圆周角与中位线

$\frac{1}{2}$。

过 B 作直径 BG，连接 AG。由 $AC\perp BD$ 得 $\angle DAC+\angle ACB=90^\circ$。又 $\angle AGB=\angle ACB$，$\angle ABG+\angle AGB=90^\circ$，故 $\angle DAC=\angle ABG$，从而 $CD=AG$。

O,F 分别为 BG,AB 的中点，所以 $OF=\frac{1}{2}AG=\frac{1}{2}CD$。

4. 方程 · 正整数解

2 组。

$x,y,z\geqslant 1$，故 $y(2z-1)\leqslant 2$，只能有 $z=1$。

此时 $x+y=3$，得到 $(x,y,z)=(1,2,1),(2,1,1)$，共 2 组。

5. 一元二次方程 · 根与三角形

$\frac{3}{4}<m\leqslant 1$。

三个根为 $1,1-\sqrt{1-m},1+\sqrt{1-m}$，实根要求 $m\leqslant 1$。

两条较短边之和大于最长边，等价于 $1+(1-\sqrt{1-m})>1+\sqrt{1-m}$，即 $\sqrt{1-m}<\frac{1}{2}$。因此 $\frac{3}{4}<m\leqslant 1$，此时三边也均为正数。

6. 概率 · 分类计数

$\frac{2}{5}$。

只考虑所占三个座位，共有 $\binom{6}{3}=20$ 种等可能的选法。

三个连续顶点构成的等腰三角形有 6 个；每隔一个顶点选取构成的等边三角形有 2 个。故概率为 $\frac{6+2}{20}=\frac{2}{5}$。

7. 分式 · 整体代换

2。

$m=\frac{a+b}{2}$，$n=\frac{b+c}{2}$，所以 $\frac{a}{m}+\frac{c}{n}=\frac{2a}{a+b}+\frac{2c}{b+c}=\frac{2(ab+2ac+bc)}{ab+ac+b^2+bc}=2$。

8. 三角形 · 全等与垂直

（1）$AP=AM$；（2）$AP\perp AM$。

由两条高可得 $\angle ABM=\angle PCA=90^\circ-\angle BAC$。又 $AB=CP$、$BM=CA$，故 $\triangle ABM\cong\triangle PCA$，从而 $AM=PA$。

由全等得 $\angle BAM=\angle CPA$。因 $CP\perp AB$，有 $\angle CPA+\angle PAE=90^\circ$，所以 $\angle BAM+\angle PAE=90^\circ$，即 $\angle PAM=90^\circ$。

9. 二次函数 · 实际应用

$R_{\max}=\frac{(U_0-A)^2}{4B}$；$I=\frac{2B}{U_0-A}$。

由 $U_0=IR+A+\frac{B}{I}$，得 $R=\frac{U_0-A}{I}-\frac{B}{I^2}$。正常工作时 $I>0$，因而 $U_0>A$。

$R=-B\left(\frac{1}{I}-\frac{U_0-A}{2B}\right)^2+\frac{(U_0-A)^2}{4B}$。因此最大阻值为 $\frac{(U_0-A)^2}{4B}$，当 $I=\frac{2B}{U_0-A}$ 时取得。

数学加试

10. 圆 · 内心与角平分线

$MB=MC=MI$。

因为 AI 平分 $\angle BAC$，所以 $\angle BAM=\angle MAC$，所对弦相等，即 $MB=MC$。

连接 BI。$\angle MBI=\angle MBC+\angle CBI=\angle MAC+\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC$。又 $\angle BIM$ 是 $\triangle ABI$ 在 I 处的外角，等于 $\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC$。故 $\angle MBI=\angle BIM$，得 $MB=MI$。

11. 方程组 · 对称与分类

$(x,y,z)=(1,1,1),(\frac{5}{2},-2,-2),(-2,\frac{5}{2},-2),(-2,-2,\frac{5}{2})$。

三式两两相减，得 $(y+2)(x-z)=0$、$(z+2)(y-x)=0$、$(x+2)(z-y)=0$。

若 $x=y=z=t$，则 $t^2+1=2t$，得 $t=1$。若三者不全相等，不妨设 $x\neq z$，则 $y=-2$；代回得 $x+z=\frac{1}{2}$、$xz=-5$，故 x,z 分别为 $-2,\frac{5}{2}$。结合循环对称性得到所列四组解。

12. 数论 · 奇偶性与绝对值

$(x,y)=(2,-2),(-2,2),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$。

$x+y$ 与 $x-y$ 同奇偶，因此 $3|x+y|+|x-y|$ 是偶数。它又是素数的平方，只能等于 $2^2=4$。

由 $3|x+y|+|x-y|=4$，且两绝对值同奇偶，只可能有 $(|x+y|,|x-y|)=(0,4)$ 或 $(1,1)$。分别求解，得 $(2,-2),(-2,2),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$。

13. 不等式 · 估值与整数部分

$[a]=2020$；$[10a]=20209$。

$a=2021-\frac{2020^{2020}}{2020^{2020}+2021^{2021}}$，故 $2020<a<2021$，所以 $[a]=2020$。

$0<\frac{2020^{2020}}{2020^{2020}+2021^{2021}}<\frac{1}{2021}$，因而 $20209<20210-\frac{10}{2021}<10a<20210$，所以 $[10a]=20209$。

信息加试

14. 数论 · 整除

$n=1,3,7$。

$\frac{3n^2+4n-7}{n+1}=3n+1-\frac{8}{n+1}$，故 $n+1$ 必须是 8 的正因数。因 $n\geqslant 1$，得 $n+1=2,4,8$，所以 $n=1,3,7$。

15. 数列求和 · 裂项相消

$2021-\frac{1}{2021^2}$。

第 k 项 $=1+\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1+\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$。

从 $k=1$ 加到 2020，中间项相消，得 $2020+1-\frac{1}{2021^2}=2021-\frac{1}{2021^2}$。

16. 数论 · 奇偶性与绝对值

$(x,y)=(2,-2),(-2,2),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$。

$x+y$ 与 $x-y$ 同奇偶，因此 $3|x+y|+|x-y|$ 是偶数。它又是素数的平方，只能等于 $2^2=4$。

由 $3|x+y|+|x-y|=4$，且两绝对值同奇偶，只可能有 $(|x+y|,|x-y|)=(0,4)$ 或 $(1,1)$。分别求解，得 $(2,-2),(-2,2),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$。

17. 数论 · 连续整数与整除

取 $p=3$ 即可。

任意三个连续整数除以 3 的余数恰好为 $0,1,2$ 各一次，所以其中有且只有一个数是质数 3 的整数倍。

18. 数论 · 质因数与连续整数

取中间两个数中的奇数的任一质因数即可。

设四个连续正整数为 $n,n+1,n+2,n+3$。中间两数 $n+1,n+2$ 中必有一个奇数 m，且 $m\geqslant 3$。取 m 的任一质因数 p，则 $p\geqslant 3$。

m 与其余三个数之差的绝对值均为 1 或 2，不能被 $p\geqslant 3$ 整除。若另一个数也被 p 整除，其与 m 的差就应被 p 整除，矛盾。因此恰有一个数是 p 的倍数。