参考答案

2022年南师附中特长生数学真题

数学部分

1. 整式 · 因式分解

$(x-1)(x+2)(x-3)$。

代入 $x=1$，原式为 0，因此可先分出因式 $x-1$。

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$。
$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$，所以原式为 $(x-1)(x+2)(x-3)$。

2. 二次根式 · 整体代入

-1。

$2x-1=-\sqrt{2022}$，平方并整理，得 $4x^2-4x=2021$。

$4x^3=4x^2+2021x=2025x+2021$。
因此 $4x^3-2025x-2022=-1$，原式为 $(-1)^3=-1$。

3. 方程组 · 对称式

$(x,y)=(2,-3)$ 或 $(-3,2)$。

$(x+y)^3=-19+3\times 6=-1$，所以 $x+y=-1$。由 $(x+y)xy=6$，得 $xy=-6$。

x,y 是方程 $u^2+u-6=0$ 的两根，故 $u=2$ 或 $u=-3$。
所以 $(x,y)=(2,-3)$ 或 $(-3,2)$。

4. 三角形 · 等腰与角度

20°。

设 $\angle DAE=2\alpha$，则 $\angle BAC=40^\circ+2\alpha$。
由 $AB=AC$，得 $\angle ACB=70^\circ-\alpha$；由 $AD=AE$，得 $\angle AED=90^\circ-\alpha$。

$\angle AED$ 是 $\triangle DEC$ 的外角，所以
$\angle EDC=\angle AED-\angle ECD$
$=(90^\circ-\alpha)-(70^\circ-\alpha)=20^\circ$。

5. 三角形 · 面积与三角比

$\frac{4}{3}$。

$\angle BAD=\angle DAC=30^\circ$。由面积相加，
$\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin 30^\circ+\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin 30^\circ$
$=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 60^\circ$。

整理得 $AD=\frac{\sqrt{3}AB\cdot AC}{AB+AC}$。
代入 $AB\cdot AC=\frac{8}{3}$、$AB+AC=2\sqrt{3}$，得 $AD=\frac{4}{3}$。

6. 数论 · 因数分解

3 组：$(8,4)$、$(24,6)$、$(56,7)$。

原式化为 $8y+xy=8x$，整理得 $(x+8)(8-y)=64$。

由原方程知 $0<y<8$，所以 $8-y$ 为 1 至 7 的整数。它又是 64 的因数，只能为 $1,2,4$。
对应 $(x,y)=(56,7),(24,6),(8,4)$，共 3 组。

7. 圆 · 切线长定理

$3\sqrt{2}$。

设内切圆与 BC 相切于 D，与 AB,AC 分别相切于 E,F。由切线长定理，$AE=AF$、$BE=BD$、$CF=CD$。
因此 $BD-CD=AB-AC=6\sqrt{2}$。

又 $BD+CD=BC=10$，得 $BD=5+3\sqrt{2}$。
$x_D=-5+BD=3\sqrt{2}$。因 $MD\perp BC$，所以 $x_M=x_D=3\sqrt{2}$。

信息加试

1. 数论 · 完全平方数

65（另两边为 56 和 33）。

设斜边长为 $10a+b$，一条直角边长为 $10b+a$，另一条为 m，其中 $1\leqslant b<a\leqslant 9$。
由勾股定理，$m^2=99(a+b)(a-b)$。

m^2 含因数 11，所以 m 是 11 的倍数，从而 $(a+b)(a-b)$ 也含因数 11。
因 $1\leqslant a-b\leqslant 8$、$3\leqslant a+b\leqslant 17$，只能有 $a+b=11$。

于是 $m^2=33^2(a-b)$，故 $a-b$ 为完全平方数。
$a-b$ 与 $a+b=11$ 同为奇数，且不超过 8，所以 $a-b=1$。解得 $a=6,b=5$。斜边长为 65，并且 $33^2+56^2=65^2$。

2. 代数 · 换元与最值

（1）$y=\frac{t}{4t^2+25}$，$t>0$；（2）最大值为 $\frac{1}{20}$。

$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$，故
$y=\frac{x-1/x}{4x^2+17+4/x^2}=\frac{t}{4t^2+25}$。

由 $x>1$，得 $t=x-\frac{1}{x}>0$。
由 $(2t-5)^2\geqslant 0$，得 $4t^2+25\geqslant 20t$。因 $t>0$，
$y=\frac{t}{4t^2+25}\leqslant\frac{1}{20}$。

当 $t=\frac{5}{2}$，即 $x=\frac{5+\sqrt{41}}{4}>1$ 时等号成立。
所以 y 的最大值为 $\frac{1}{20}$。

数学加试

1. 二次根式 · 整体思想

216。

有理化得 $a=\frac{7+\sqrt{47}}{2}$。由 $6<\sqrt{47}<7$，知 $6<a<7$。
所以 $b=-(a-6)=6-a$，从而 $a+b=6$。

$a^3+b^3+18ab=(a+b)^3-3ab(a+b)+18ab$
$=6^3-18ab+18ab=216$。

2. 数论 · 配因式与枚举

$(-4,2)$、$(14,-2)$、$(2,-2)$、$(-16,2)$。

原方程可化为 $(x+2y+1)(x+7y+1)=11$。

令 $u=x+2y+1$、$v=x+7y+1$，则 $uv=11$。
(u,v) 只能为 $(1,11),(11,1),(-1,-11),(-11,-1)$。

由 $y=\frac{v-u}{5}$、$x=u-2y-1$，依次得到
$(x,y)=(-4,2),(14,-2),(2,-2),(-16,2)$。代回均满足原方程。