参考答案

2023年南师附中特长生数学真题

数学部分

1. 二次根式 · 整体代入

$3\sqrt{5}$。

$x=\sqrt{5}-2$，所以 $(x+2)^2=5$，即 $x^2+4x=1$。

$x^3+4x^2+2x+6=x(x^2+4x)+2x+6=3x+6=3\sqrt{5}$。

2. 方程 · 分类讨论

$x=\frac{3}{2}$。

令 $t=\sqrt{x-1}>0$。当 $0<t\leqslant 1$ 时，左边为 2，故 $2=1/t^2$，得 $t=\sqrt{2}/2$。当 $t>1$ 时，左边为 $2t>2$，右边为 $1/t^2<1$，无解。

$x=t^2+1=\frac{3}{2}$，代入原式成立。

3. 概率 · 三角形三边关系

$\frac{3}{10}$。

从 5 张卡片中取 3 张，共有 $\binom{5}{3}=10$ 种等可能取法。能组成三角形的数字组合只有 $(1,2,2)$ 和 $(2,2,3)$，分别有 2 种和 1 种取法。

所求概率为 $\frac{2+1}{10}=\frac{3}{10}$。

4. 几何 · 相似三角形

5。

由 $AD=AE$，得 $\angle ADE=\angle AED$。又 $\angle BAC=\angle BAE+\angle EAC=\angle ACB+\angle EAC=180^\circ-\angle AEC=\angle AED=\angle ADC$，且两三角形的 C 角相同，所以 $\triangle ABC\sim\triangle DAC$。

$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{CD}$，故 $BC=AC^2/CD=36/4=9$，$BD=9-4=5$。

5. 数论 · 质数与因数分解

83。

由于 x,y,z 都是质数，且 $7\mid xyz$，不妨设 $x=7$。原式化为 $yz=y+z+7$，即 $(y-1)(z-1)=8$。

正因数配对为 $(1,8),(2,4),(4,2),(8,1)$；满足 y,z 都为质数的只有 $(y,z)=(3,5)$ 或 $(5,3)$。故所求为 $7^2+3^2+5^2=83$。

6. 一元二次方程 · 因式分解

（1）两根为 2 和 $(k+1)^2+3$，恒不相等；（2）最小值为 1，在 $k=-1$ 时取得。

原方程可写成 $(x-2)[x-(k^2+2k+4)]=0$，两根为 2 与 $(k+1)^2+3\geqslant 3$，故恒有两个不相等的实数根。

$|x_1-x_2|=(k+1)^2+1\geqslant 1$，当且仅当 $k=-1$ 时取等号。

7. 整式 · 因式分解

（1）$(a^2-ab+1)(ab+b^2+1)$；（2）$(3a-2b+c)(3a+2b-c)$。

原式 $=ab(a-b)(a+b)+a(a-b)+b(a+b)+1=[a(a-b)+1][b(a+b)+1]=(a^2-ab+1)(ab+b^2+1)$。

$9a^2-4b^2+4bc-c^2=(3a)^2-(2b-c)^2=(3a-2b+c)(3a+2b-c)$。

8. 几何 · 圆与中位线

$AH=2OD$。

若三角形为直角三角形，可直接由中点关系得证；以下考虑非直角情形。作外接圆直径 AP。
由圆周角定理，$BP\perp AB$，$CP\perp AC$。又 $CH\perp AB$、$BH\perp AC$，所以 $BP\parallel CH$、$CP\parallel BH$，四边形 $BHCP$ 为平行四边形。

D为BC的中点，故也是HP的中点；O为直径AP的中点。由两段中点的位置关系，得 $OD=AH/2$，即 $AH=2OD$。

数学加试

9. 整式 · 恒等变形

2023。

设共同比值为 t，则 $a=t(x^2-yz)$、$b=t(y^2-xz)$、$c=t(z^2-xy)$，从而
$a+b+c=t(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=2023$。

$ax+by+cz=t(x^3+y^3+z^3-3xyz)=t(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$，除以非零的 $x+y+z$，即得 2023。

10. 一元二次方程 · 根的条件

$-\frac{9}{4}\leqslant a<0$。

若 $a\geqslant 0$，则对任意 $x>0$，左边各项之和均为正，不能为零。因此 $a<0$。又判别式
$\Delta=4(a+3)^2-4a(a+2)=4(4a+9)\geqslant 0$，故 $a\geqslant -9/4$。

当 $-9/4\leqslant a\leqslant -2$ 时，两根之和 $-2(a+3)/a>0$、积 $(a+2)/a\geqslant 0$，至少有一个正根；当 $-2<a<0$ 时，两根之积小于零，恰有一个正根。综上，$-9/4\leqslant a<0$。

11. 几何 · 圆的相切与勾股定理

$\frac{21-6\sqrt{6}}{25}$。

设扇形圆心为 C，大圆半径为 R。$CO=R/\sin 30^\circ=2R$，且 $CO+R=3$，故 $R=1$、$CO=2$。

设小圆半径为 r，从 O,E 向靠近小圆的扇形半径作垂线，垂足分别为 F,G。则 $OF=1$、$EG=r$、$CF=\sqrt{3}$、$CE=3-r$。又 $OE=1+r$，所以 $FG=\sqrt{(1+r)^2-(1-r)^2}=2\sqrt{r}$，从而 $CG=\sqrt{3}+2\sqrt{r}$。

由 $CG^2+EG^2=CE^2$ 得 $(\sqrt{3}+2\sqrt{r})^2+r^2=(3-r)^2$，即 $5r+2\sqrt{3r}-3=0$。令 $u=\sqrt{r}>0$，解得 $u=(3\sqrt{2}-\sqrt{3})/5$，故 $r=(21-6\sqrt{6})/25$。

12. 不等式 · 整数解

最大值为 40，最小值为 9。

原不等式等价于 $\frac{3n}{4}<k<\frac{4n}{5}$。区间长度为 $n/20$；若 $n>40$，长度大于 2，必有至少两个整数，不合题意。当 $n=40$ 时，$30<k<32$，仅有 $k=31$，故最大值为 40。

因 $4k-3n$、$4n-5k$ 都是正整数，故 $n=5(4k-3n)+4(4n-5k)\geqslant 5+4=9$。当 $n=9$ 时，$27/4<k<36/5$，仅有 $k=7$，故最小值为 9。

信息加试

13. 数论 · 整除与范围

-1 或 0。

$b+c>0$ 且是负整数 a 的整数倍，所以 $-a\leqslant b+c$，即 $a\geqslant -b-c$。于是 $-c\leqslant a+b<c$，故 $-1\leqslant (a+b)/c<1$。该比值为整数，且 $a+b<c$，因此只能为 -1 或 0。

$(a,b,c)=(-3,1,2)$ 时比值为 -1；$(a,b,c)=(-1,1,2)$ 时比值为 0。两组均满足任意两数之和是第三个数的整数倍。

14. 数论 · 平方数余数

$8\mid n$ 且 $5\mid n$，所以 $40\mid n$。

若 n 为奇数，则 $2n+1$ 除以 4 余 3，不可能是平方数，故 n 为偶数。因此 $3n+1$ 是奇平方数，除以 8 余 1，所以 $3n$ 能被 8 整除，进而 $8\mid n$。

平方数除以 5 的余数只能为 $0,1,4$。由 $2n+1$ 为平方数，得 n 除以 5 的余数为 $0,2,4$；由 $3n+1$ 为平方数，得余数为 $0,1,3$。两者同时成立，余数只能为 0，故 $5\mid n$。

由于 8 与 5 互质，得 $40\mid n$。