参考答案

2025年南师附中特长生数学选题

选题整理

8. 圆 · 垂径定理 · 几何最值

（1）17；（2）$\frac{\sqrt{17}-1}{2}$。

分别取 AC、BD 的中点 M,N，设 $OM=x$、$ON=y$。由两弦垂直，得 $x^2+y^2=OE^2=1$。垂径定理给出 $AC=2\sqrt{9-x^2}$、$BD=2\sqrt{9-y^2}$，所以 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=2\sqrt{(9-x^2)(9-y^2)}$。

$(9-x^2)+(9-y^2)=17$，由 $(a-b)^2\geqslant 0$ 可知两非负数和一定时积最大为和的一半的平方，因此 $S_{ABCD}\leqslant 17$。当 $x=y=1/\sqrt{2}$ 时取等号，面积最大值为 17。

$\angle AEB=90^\circ$，F 为斜边 AB 的中点，所以 $EF=AF$。由垂径定理，$OF\perp AB$，故 $OF^2+AF^2=OA^2=9$，即 $OF^2+EF^2=9$。

令 $OF=t\geqslant 0$。由 $EF\leqslant EO+OF=1+t$，得 $9=t^2+EF^2\leqslant t^2+(1+t)^2$，整理为 $t^2+t-4\geqslant 0$，所以 $t\geqslant\frac{\sqrt{17}-1}{2}$。使 E,O,F 依次共线，且两条弦关于 OE 对称时可以取等号，故所求最小值为 $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$。