参考答案

2026年南师附中特长生数学真题（回忆版）

综合卷数学 · 填空题

1	2029。	2	4。
3	$4t^2$。	4	$\frac{2}{3}$。
5	31。		

1. 整式 · 整体代入

2029。

$x^3+2x^2-2x+2026=(x+1)(x^2+x-3)+2029=2029$。

2. 几何最值 · 对称与圆

4。

作点 D 关于直线 BC 的对称点 G，则 $PD=PG$，且 $EG=\sqrt{3^2+4^2}=5$。由 $EF=EA=1$，得 $PF+PD=PF+PG\geqslant PE-EF+PG\geqslant EG-1=4$。

取 $Q=B$，此时翻折像 F 在射线 EG 上且 $EF=1$；取 $P=EG\cap BC$，有 $CP=\frac{3}{2}$。此时 E,F,P,G 依次共线，故最小值为 4。

点P、Q所在边按原图整理：Q在AB上，P在BC上。

3. 二次根式 · 分母有理化

$4t^2$。

设 $a=\sqrt{t^2+1}$，则 $(a-t)(a+t)=1$。因此 $x+\frac{1}{x}-2=\frac{(a-t)^2+(a+t)^2-2(a^2-t^2)}{a^2-t^2}=4t^2$。

4. 概率 · 等可能情况枚举

$\frac{2}{3}$。

按双方随机且等可能出牌计算。不妨固定甲依次出 $1,3,5$，乙的出牌顺序共有 6 种。

乙恰好得 2 分的顺序为 $(2,6,4),(4,2,6),(4,6,2),(6,4,2)$，共 4 种，所以概率为 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$。

概率按双方随机且等可能出牌计算。

5. 数列规律 · 奇偶性

31。

设 $S_m=1+4+\cdots+4^m$。当 $m\geqslant 1$ 时，依次做“减 1、除以 2、再除以 2”，就由 S_m 得到 S_{m-1}。

由 S_{10} 到 $S_0=1$ 需 $10\times3=30$ 步，再减 1 得到 0，共 31 步。

综合卷数学 · 解答题

6. 整式 · 因式分解

（1）$(x+1)(x-2)^2$；

（2）$(ab+a+1)(ab+b+1)$。

$x^3-3x^2+4=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2$。

令 $t=ab+1$，则原式 $=(t+a+b)t+ab=t^2+(a+b)t+ab=(t+a)(t+b)$，故结果为 $(ab+a+1)(ab+b+1)$。

7. 函数综合 · 根与系数及最值

（1）$k=1$；（2）$PQ_{\min}=\sqrt{2}$，此时 $Q(1,1)$。

联立两函数，消去 x，得 $2y^2-2y-k=0$。两根之差为 $\sqrt{1+2k}=MN=\sqrt{3}$，所以 $k=1$。

设 $Q(t,\frac{1}{t})$，$t>0$。则 $PQ^2=(t-2)^2+(\frac{1}{t}-2)^2=(t+\frac{1}{t}-2)^2+2\geqslant2$。当 $t=1$ 时取等，故最小值为 $\sqrt{2}$。

8. 新定义 · 点的轨迹与面积

（1）2；（2）$S_1<S_2$。

$|x|+|y|=1$ 的轨迹是以 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 为顶点的正方形，两条对角线长均为 2，所以面积为 2。

$p=2$ 时为 $x^2+y^2=1$；$p=4$ 时为 $x^4+y^4=1$。当 $0<x<1$ 时，两条曲线第一象限上的纵坐标满足 $y_1=\sqrt{1-x^2}$，$y_2=\sqrt[4]{1-x^4}$，且 $y_1^4-y_2^4=2x^2(x^2-1)<0$，故 $y_1<y_2$。结合四象限对称性得 $S_1<S_2$。

数学加试

1. 不等式 · 分类讨论

$x\geqslant\frac{1}{2}$。

移项得 $\sqrt{x^2+2}\geqslant2-x$。当 $x\geqslant2$ 时，右边不大于 0，不等式恒成立。

当 $x<2$ 时，两边均非负，平方得 $x^2+2\geqslant(2-x)^2$，即 $x\geqslant\frac{1}{2}$。结合本情况得 $\frac{1}{2}\leqslant x<2$，合并得 $x\geqslant\frac{1}{2}$。

2. 几何 · 角平分线与相似

$AD=4\sqrt{3}$。

设 $\angle BAD=\angle DAC=\alpha$，$\angle BCN=2\beta$。由 BM 为 BA 的反向延长线及外角平分线关系，得 $\angle AMD=90^\circ-\alpha-\beta$。由 DN 垂直于 $\angle ACB$ 的内角平分线，得 $\angle CDN=90^\circ-\beta$，故 $\angle ADN=90^\circ-\alpha-\beta$。

又 $\angle DAM=\angle DAN=\alpha$，所以 $\triangle ADM\sim\triangle AND$。因此 $\frac{AD}{AN}=\frac{AM}{AD}$，得 $AD^2=AM\cdot AN=48$，故 $AD=4\sqrt{3}$。

3. 方程组 · 根与系数

$x=y=-\frac{2}{3}$。

由根与系数关系，$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-1$，且 $\alpha-\beta=\pm2\sqrt{2}$。两式相减得 $(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-1)(x-y)=0$。其中 $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=\pm2\sqrt{2}\neq1$，所以 $x=y$。

又 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-2$，代回得 $-2x=x+2$，故 $x=y=-\frac{2}{3}$。

4. 整式 · 换元与因式分解

$a<b$。

设 $u=\sqrt[20]{2}$，则 $\sqrt[10]{2}=u^2$。于是 $a-b=u^2-2026u+2025=(u-1)(u-2025)$。

因为 $1<u<2<2025$，所以 $(u-1)(u-2025)<0$，故 $a<b$。

信息加试 · 一试

5. 组合 · 配方与计数

660 组。

令 $x_0=x_{11}=0$，原方程等价于 $\sum_{i=0}^{10}(x_{i+1}-x_i)^2=4$。这 11 个整数差之和为 0，因此不能只有一个差为 ±2，只能是两个 $+1$、两个 -1，其余为 0。

由于各 $x_i\geqslant0$，四个非零差按顺序只能是 $(+1,+1,-1,-1)$ 或 $(+1,-1,+1,-1)$。从 11 个位置中选出这四个位置，共有 $2\binom{11}{4}=660$ 种，每一种唯一确定一组解。

7. 二次根式 · 配对求和

$\frac{M}{N}=1+\sqrt{2}$。

对 $1\leqslant n\leqslant2024$，有 $(\sqrt{45+\sqrt{n}}+\sqrt{45-\sqrt{n}})^2=90+2\sqrt{2025-n}$。两边开正平方根，得 $\sqrt{45+\sqrt{n}}+\sqrt{45-\sqrt{n}}=\sqrt{2}\sqrt{45+\sqrt{2025-n}}$。

当 n 从 1 到 2024 时，$2025-n$ 恰好遍历同样的整数。因此逐项相加得到 $M+N=\sqrt{2}M$，所以 $\frac{M}{N}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=1+\sqrt{2}$。

8. 函数 · 抛物线与轴对称

$k<-\frac{1}{2}$。

设 $l:y-1=k(x-1)$，对称点为 $A(u,u^2)$、$B(v,v^2)$，其中 $u\neq v$。若 $k=0$，则 AB 应竖直，与抛物线上两点横坐标不同矛盾。故 $k\neq0$，由垂直关系得 $u+v=-\frac{1}{k}$。中点在 l 上又给出 $u^2+v^2=1-2k$。

因此 $(u-v)^2=2(u^2+v^2)-(u+v)^2=2-4k-\frac{1}{k^2}>0$。整理得 $4k^3-2k^2+1=(2k+1)(2k^2-2k+1)<0$。

由于 $2k^2-2k+1=2(k-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}>0$，得 $k<-\frac{1}{2}$。反之，在此范围内，由上述和、平方和确定的两个横坐标为不同实数，且其中点、垂直条件均成立，所以这个范围充分且必要。

信息加试 · 二试

3. 数论 · 韦达跳跃

$n=1,2,3$。

记 $S=\frac{(a+b+c+d)^2}{abcd}$，则 S 是大于 n^2 的正整数。固定一个能取到的 S，

在所有对应正整数解中，选取和最小的一组，并按 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$ 排列。记 $t=a+b+c$。

等式可写成 $d^2+(2t-Sabc)d+t^2=0$。若 $d>t$，另一根 $d'=Sabc-2t-d=\frac{t^2}{d}$ 是正整数，且 $d'<t<d$。

替换后仍满足原等式，却使四数之和更小，矛盾。因此 $c\leqslant d\leqslant t$。

因为 $cd\leqslant t^2$，所以 $d+\frac{t^2}{d}-(c+\frac{t^2}{c})=(d-c)(1-\frac{t^2}{cd})\leqslant 0$。于是 $S=\frac{d+t^2/d+2t}{abc}\leqslant\frac{(a+b+2c)^2}{abc^2}\leqslant\frac{16}{ab}\leqslant 16$。

由 $n^2<S\leqslant 16$ 得 $n\leqslant 3$。取 $a=b=c=d=1$，则分式为 16；当 $n=1,2,3$ 时，$16-n^2$ 分别为 $15,12,7$，均为正整数。因此全部可能值为 $1,2,3$。