参考答案

2023 年南京市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分．在每小题所给出的四个选项中，恰有一项是符合题目要求的，请将正确选项前的字母代号填涂在答题卡相应位置上）

1．（2 分）全国深入践行习近平生态文明思想，科学开展大规模国土绿化行动，厚植美丽中国亮丽底色，去年完成造林约 3830000 公顷．用科学记数法表示 3830000 是（　　）

A．3.83×10^6　　B．0.383×10^6　　C．3.83×10^7　　D．0.383×10^7

【分析】科学记数法的表现形式为 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\leqslant|a|<10$，n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同，当原数绝对值大于等于 10 时，n 是正整数，当原数绝对值小于 1 时，n 是负整数；由此进行求解即可得到答案．

【解答】解：$3830000=3.83\times10^6$．

故选：A．

【点评】本题主要考查了科学记数法，解题的关键在于能够熟练掌握科学记数法的定义．

2．（2 分）整数 a 满足 $\sqrt{19}<a<\sqrt{29}$，则 a 的值为（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【分析】根据夹逼法估算无理数的大小即可求出 a 的值．

【解答】解：$\because\sqrt{19}<\sqrt{25}<\sqrt{29}$，

即$\sqrt{19}<5<\sqrt{29}$,

∴整数$a=5$,

故选：C.

【点评】本题考查了估算无理数的大小，熟练掌握夹逼法是解题的关键.

3. （2分）若一个等腰三角形的腰长为3，则它的周长可能是（　　）

A．5　　B．10　　C．15　　D．20

【分析】根据等腰三角形的性质及三角形三边关系求解即可.

【解答】解：∵等腰三角形的腰长为3,

∴3－3<等腰三角形的底长<3+3,

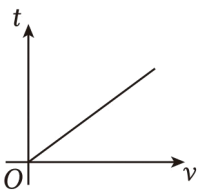
即0<等腰三角形的底长<6,

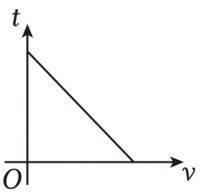
∴6<等腰三角形的周长<12,

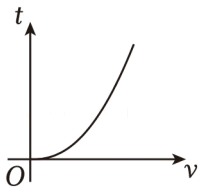
故选：B.

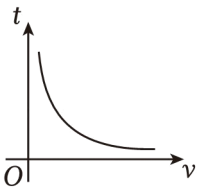
【点评】此题考查了等腰三角形的性质，熟记等腰三角形的性质是解题的关键.

4. （2分）甲、乙两地相距100km，汽车从甲地匀速行驶到乙地，则汽车行驶的时间t（单位：h）与行驶速度v（单位：km/h）之间的函数图象是（　　）

A．

B．

C. 

D. 

【分析】根据实际意义，写出函数的解析式，根据函数的类型，以及自变量的取值范围即可进行判断.

【解答】解：根据题意有：$100=v\cdot t$,

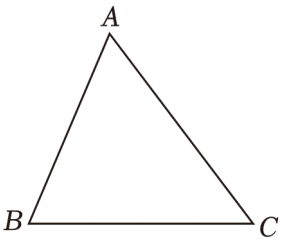
所以$t=\frac{100}{v}$,

故v与t之间是反比例函数，其图象在第一象限.

故选：D.

【点评】本题考查函数的图象，现实生活中存在大量成反比例函数的两个变量，解答该类问题的关键是确定两个变量之间的函数关系，然后利用实际意义确定其所在的象限.

5. （2分）我国南宋数学家秦九韶的著作《数书九章》中有一道问题：“问沙田一段，有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里．里法三百步，欲知为田几何？”问题大意：如图，在$\triangle ABC$中，$AB=13$里，$BC=14$里，$AC=15$里，则$\triangle ABC$的面积是（　　）

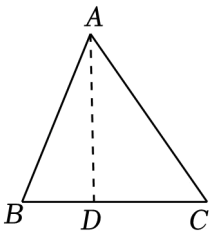


A．80平方里　　B．82平方里　　C．84平方里　　D．86平方里

【分析】过点A作$AD\perp BC$，利用勾股定理求出AD的长，再利用三角形的面积公式求出$\triangle ABC$的面

积即可.

【解答】解：如图，过点A作$AD\perp BC$于D，



设$BD=x$里，则$CD=（14-x）$里，

在Rt△ABD中，$AD^2+x^2=13^2$，

在Rt△ADC中，$AD^2=15^2-（14-x）^2$，

$\therefore 13^2-x^2=15^2-（14-x）^2$，

$13^2-x^2=15^2-196+28x-x^2$，

解得$x=5$，

在Rt△ABD中，$AD=\sqrt{13^2-5^2}=12$（里），

$\therefore$△ABC的面积$=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times 14\times 12=84$（平方里），

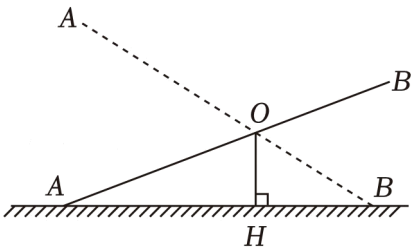
故选：C.

【点评】本题考查了三角形面积，勾股定理，解决本题的关键在于利用两个直角三角形的公共边找到突破点．主要利用了勾股定理进行解答.

6. （2分）如图，不等臂跷跷板AB的一端A碰到地面时，另一端B到地面的高度为$60cm$；当AB的一端

B 碰到地面时，另一端 A 到地面的高度为 $90cm$，则跷跷板 AB 的支撑点 O 到地面的高度 OH 是

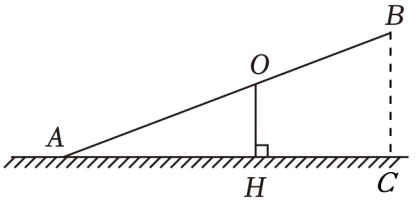
（　　）



A．$36cm$　　B．$40cm$　　C．$42cm$　　D．$45cm$

【分析】过点 B 作 $BC\perp AH$，垂足为 C，再证明 A 字模型相似△AOH∽△ABC，从而可得$\frac{OH}{BC}=\frac{AO}{AB}$，过点 A 作 $AD\perp BH$，垂足为 D，然后证明 A 字模型相似△ABD∽△OBH，从而可得$\frac{OH}{AD}=\frac{OB}{AB}$，最后进行计算即可解答.

【解答】解：如图：过点 B 作 $BC\perp AH$，垂足为 C，



∵$OH\perp AC$，$BC\perp AC$，

∴∠AHO＝∠ACB＝90°，

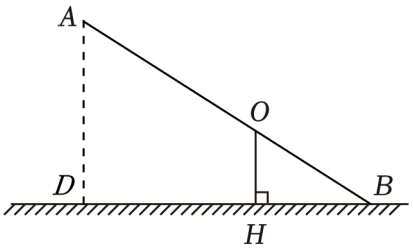
∵∠BAC＝∠OAH，

∴△AOH∽△ABC，

∴$\frac{OH}{BC}=\frac{AO}{AB}$，

$\therefore \frac{OH}{60}=\frac{AO}{AB}$,

如图：过点A作$AD\perp BH$，垂足为D,



$\because OH\perp BD$，$AD\perp BD$,

$\therefore \angle OHB=\angle ADB=90°$,

$\because \angle ABD=\angle OBH$,

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle OBH$,

$\therefore \frac{OH}{AD}=\frac{OB}{AB}$,

$\therefore \frac{OH}{90}=\frac{OB}{AB}$,

$\therefore \frac{OH}{60}+\frac{OH}{90}=\frac{AO}{AB}+\frac{OB}{AB}$,

$\therefore \frac{OH}{60}+\frac{OH}{90}=\frac{AB}{AB}$,

$\therefore \frac{OH}{60}+\frac{OH}{90}=1$,

解得：$OH=36$,

$\therefore$跷跷板AB的支撑点O到地面的高度OH是$36cm$,

故选：A.

【点评】本题考查了相似三角形的应用，熟练掌握 A 字模型相似三角形是解题的关键.

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上）

7. （2 分）计算：$|-2|=$ 2 ；$\sqrt{(-2)^2}=$ 2 .

【分析】根据绝对值的性质和二次根式的性质，进行计算即可.

【解答】解：$|-2|=2$，$\sqrt{(-2)^2}=2$,

故答案为：2，2.

【点评】本题主要考查了实数的有关计算，解题关键是熟练掌握绝对值的性质和二次根式的性质.

8. （2 分）若式子$\frac{1}{x-2}$在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是 $x\neq 2$.

【分析】根据分式有意义的条件解答即可.

【解答】解：∵式子$\frac{1}{x-2}$在实数范围内有意义,

∴$x-2\neq 0$.

∴$x\neq 2$.

故答案为：$x\neq 2$.

【点评】本题考查的是分式有意义的条件，熟知分式有意义的条件是分母不等于零是解题的关键.

9. （2 分）计算$\sqrt{12}\times\sqrt{6}-\sqrt{18}$的结果是 $3\sqrt{2}$.

【分析】先计算二次根式的乘法，再算加减，即可解答.

【解答】解：$\sqrt{12}\times\sqrt{6}-\sqrt{18}$

$=6\sqrt{2}-3\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}$,

故答案为：$3\sqrt{2}$.

【点评】本题考查了二次根式的混合运算，准确熟练地进行计算是解题的关键.

10. （2 分）分解因式 $3a^2-6a+3$ 的结果是 $3(a-1)^2$.

【分析】先提取公因式，再利用完全平方公式.

【解答】解：$3a^2-6a+3$

$=3(a^2-2a+1)$

$=3(a-1)^2$.

故答案为：$3(a-1)^2$.

【点评】本题考查了整式的因式分解，掌握因式分解的提公因式法、公式法是解决本题的关键.

11. （2 分）计算$2^3\times4^4\times(\frac{1}{8})^5$的结果是 $\frac{1}{16}$.

【分析】逆向应用积的乘方运算法则计算即可.

【解答】解：$2^3\times4^4\times(\frac{1}{8})^5$

$=[2^3\times4^3\times(\frac{1}{8})^3]\times4\times(\frac{1}{8})^2$

$=(2\times4\times\frac{1}{8})^3\times4\times\frac{1}{64}$

$=1^3\times4\times\frac{1}{64}$

$=1\times4\times\frac{1}{64}$

$=\frac{1}{16}$.

故答案为：$\frac{1}{16}$.

【点评】本题考查了有理数的混合运算，掌握相关运算法则是解答本题的关键.

12. （2 分）某校九年级有 8 个班级，人数分别为 37，a，32，36，37，32，38，34．若这组数据的众数为 32，则这组数据的中位数为 __35__ ．

【分析】根据众数、中位数的定义分别进行解答，即可求出答案.

【解答】解：∵一组数据 37，a，32，36，37，32，38，34 的众数为 32，

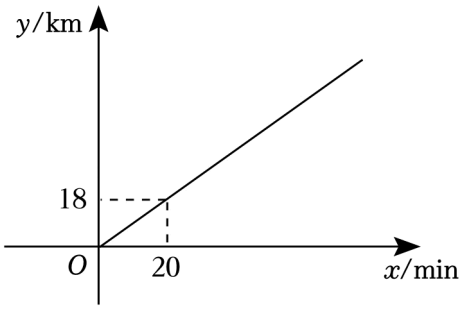
∴a＝32，

把这组数据从小到大排列为 32，32，32，34，36，37，37，38，排在中间的两个数分别为 34，36，所以这组数据的中位数为$\frac{34+36}{2}$=35.

故答案为：35.

【点评】本题考查了确定一组数据的中位数和众数的能力．要明确定义，一些学生往往对这个概念掌握不清楚，计算方法不明确而误选其它选项，注意找中位数的时候一定要先排好顺序，然后再根据奇数和偶数个来确定中位数，如果数据有奇数个，则正中间的数字即为所求，如果是偶数个则找中间两位数的平均数.

13. （2 分）甲车从 A 地出发匀速行驶，它行驶的路程 y（单位：km）与行驶的时间 x（单位：min）之间的函数关系如图所示．甲车出发 20min 后，乙车从 A 地出发沿同一路线匀速行驶．若乙车经过 20min～30min（包含 20min 和 30min）追上甲车，则乙车的速度 v（单位：km/min）的取值范围是 $\frac{3}{2}\leq v\leq\frac{9}{5}$．



【分析】根据图象，求出甲车的速度，设甲车出发 $t$$min$ 后乙车追上甲车，根据两车与 A 地距离相等列等式，用 t 将 v 表示出来，根据 t 的取值范围，求出 v 的最小值即可．

【解答】解：根据图象，得甲车的速度为 $18\div20=\frac{9}{10}$（km/min），

设甲车出发 $t$$min$ 后乙车追上甲车，根据题意，$40\leqslant t\leqslant50$．

则 $\frac{9}{10}t=v(t-20)$，得 $v=\frac{0.9t}{t-20}=\frac{9t}{10(t-20)}=\frac{9}{10-\frac{200}{t}}$，

$\therefore v$ 随 t 的增大而减小．

当 $t=50$ 时，v 取最小值，$v=\frac{3}{2}$；

当 $t=40$ 时，v 取最大值，$v=\frac{9}{5}$，

$\therefore\frac{3}{2}\leq v\leq\frac{9}{5}$，

故答案为：$\frac{3}{2}\leq v\leq\frac{9}{5}$.

【点评】本题考查一次函数的应用，根据图象求出甲车的速度是本题的关键.

14. （2 分）在平面直角坐标系中，点 O 为原点，点 A 在第一象限，且 $OA=3$．若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 A，则 k 的取值范围是 $0<k\leq\frac{9}{2}$ ．

【分析】根据题意可知 A 为反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与直线 $y=x$ 的交点时，k 的值最大，求得 A 在直线 $y=x$ 上时点 A 的坐标，即可求得 k 的最大值，即可得到距离.

【解答】解：由题意可知 A 为反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与直线 $y=x$ 的交点时，k 的值最大

∵$OA=3$,

∴A 在直线 $y=x$ 上时，A（$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$\frac{3\sqrt{2}}{2}$），

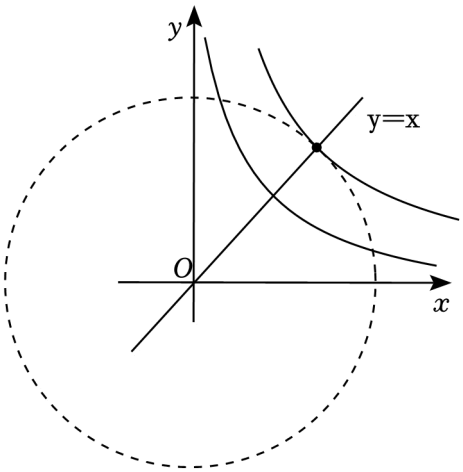
∴此时 $k=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}$,

∵点 A 在第一象限,

∴$k>0$,

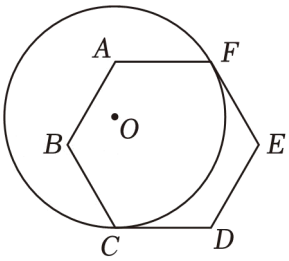
∴k 的取值范围是 $0<k\leq\frac{9}{2}$,

故答案为：$0<k\leq\frac{9}{2}$.



【点评】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，求得 k 的最大值是解题的关键.

15. （2 分）如图，⊙O 与正六边形 $ABCDEF$ 的边 CD，EF 分别相切于点 C，F．若 $AB=2$，则⊙O 的半径长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ．



【分析】连接 CF，OC，OF，过 D 作 $DG\perp CF$ 于 G，过 E 作 $EH\perp CF$ 于 H，根据切线的性质得到 $\angle OFE=\angle OCD=90°$，求得 $\angle FED=\angle CDE=120°$，根据等边三角形的性质得到 $\angle OCF=\angle OFC=30°$，求得 $\angle EFH=\angle DCG=90°$，根据全等三角形的性质得到 $FH=CG$，$EH=DG$，得到 $HG=DE=2$，求得 $CF=4$，过 O 作 $OM\perp CF$ 于 M，解直角三角形即可得到结论.

【解答】解：连接 CF，OC，OF，过 D 作 $DG\perp CF$ 于 G，过 E 作 $EH\perp CF$ 于 H，

$\therefore EH\parallel DG$，

∵EF，CD是⊙O的切线，

∴∠OFE＝∠OCD＝90°，

∵多边形$ABCDEF$是正六边形，

∴∠FED＝∠CDE＝120°，

∴∠COF＝120°，

∵OC＝OF，

∴∠OCF＝∠OFC＝30°，

∴∠EFH＝∠DCG＝60°，

∵∠EHF＝∠DGC＝90°，CD＝EF，

∴△CDG≌△FEH（AAS），

∴FH＝CG，EH＝DG，

∴四边形$EHGD$是矩形，

∴HG＝DE＝2，

∵EF＝CD＝2，∠DCG＝∠EFH＝∠OFE﹣∠OFH＝60°，

∴FH＝CG＝$\frac{1}{2}EF$＝1，

∴CF＝4，

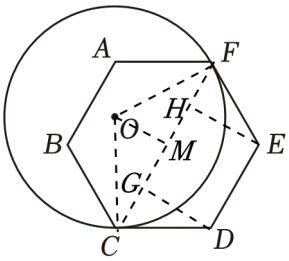
过O作OM⊥CF于M，

$\therefore CM=\frac{1}{2}CF=2$,

$\therefore OC=\frac{CM}{\cos 30°}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

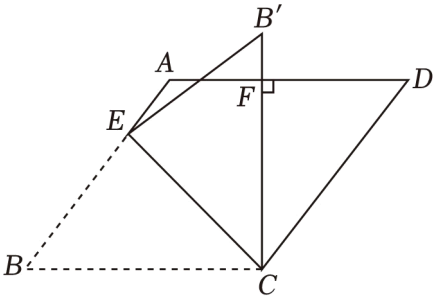
$\therefore \odot O$ 的半径长为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

故答案为：$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.



【点评】本题考查了正多边形与圆，正六边形的性质，解直角三角形，矩形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，正确地找出辅助线是解题的关键.

16．（2 分）如图，在菱形纸片 $ABCD$ 中，点 E 在边 AB 上，将纸片沿 CE 折叠，点 B 落在 B' 处，$CB'\perp AD$，垂足为 F．若 $CF=4cm$，$FB'=1cm$，则 $BE=$ $\frac{25}{7}$ cm.



【分析】作 $EH\perp BC$ 于点 H，由 $CF=4cm$，$FB'=1cm$，求得 $B'C=5cm$，由折叠得 $BC=B'C=5cm$，由菱形的性质得 $BC\parallel AD$，$DC=BC=5cm$，$\angle B=\angle D$，因为 $CB'\perp AD$ 于点 F，所以$\angle BCB'=\angle CFD=$

90°，则∠BCE＝∠$B'CE$＝45°，$DF=\sqrt{DC^2-CF^2}$=3cm，所以∠HEC＝∠BCE＝45°，则CH＝EH，由$\frac{EH}{BE}$=sin$B$＝sin$D$=$\frac{4}{5}$，$\frac{BH}{BE}$=cos$B$＝cos$D$=$\frac{3}{5}$，得CH＝EH=$\frac{4}{5}BE$，BH=$\frac{3}{5}BE$，于是得$\frac{4}{5}BE+\frac{3}{5}BE$＝5，则$BE$=$\frac{25}{7}cm$．另一种解法是，延长$DA$交$CE$的延长线于点$M$，由$AD$＝$BC$＝$B'C$＝5$cm$，$FD$＝3$cm$，得$AF$＝2$cm$，则$AM$＝2$cm$，由$\frac{AE}{EB}=\frac{AM}{BC}=\frac{2}{5}$，求得$EB$=$\frac{25}{7}cm$.

【解答】解：作$EH\perp BC$于点H，则∠BHE＝∠CHE＝90°，

∵CF＝4cm，FB'＝1cm，

∴$B'C$＝CF+FB'＝4+1＝5（cm），

由折叠得BC＝$B'C$＝5cm，∠BCE＝∠$B'CE$，

∵四边形$ABCD$是菱形，

∴BC∥AD，DC＝BC＝5cm，∠B＝∠D，

∵$CB'\perp AD$于点F，

∴∠BCB'＝∠CFD＝90°，

∴∠BCE＝∠$B'CE$=$\frac{1}{2}$∠BCB'=$\frac{1}{2}$×90°＝45°，$DF=\sqrt{DC^2-CF^2}=\sqrt{5^2-4^2}$=3（$cm$），

∴∠HEC＝∠BCE＝45°，

∴CH＝EH，

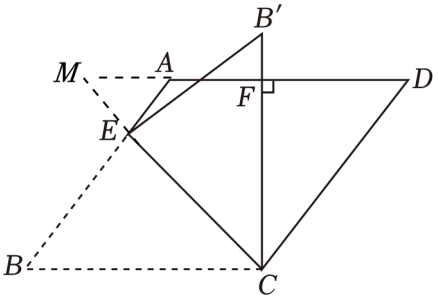
∵$\frac{EH}{BE}$=sin$B$＝sin$D$=$\frac{CF}{DC}$=$\frac{4}{5}$，$\frac{BH}{BE}$=cos$B$＝cos$D$=$\frac{DF}{DC}$=$\frac{3}{5}$，

$\therefore CH=EH=\frac{4}{5}BE$，$BH=\frac{3}{5}BE$，

$\therefore \frac{4}{5}BE+\frac{3}{5}BE=5$，

$\therefore BE=\frac{25}{7}cm$，

解法二：延长 DA 交 CE 的延长线于点 M.



$\because AD\parallel CB$，

$\therefore \angle M=\angle MCB$，

$\because \angle MCB=\angle MCF=45°$，

$\therefore \angle M=\angle MCF=45°$，

$\therefore CF=FM=4cm$，

$\because AD=BC=B'C=5cm$，$FD=3cm$，

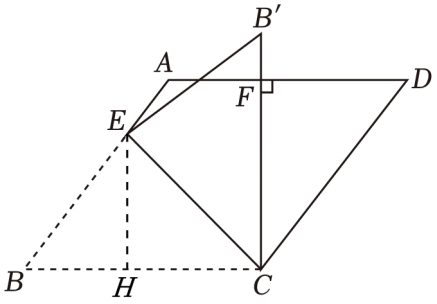
$\therefore AF=2cm$，

$\therefore AM=2cm$，

$\because \frac{AE}{EB}=\frac{AM}{BC}=\frac{2}{5}$，

$\therefore EB=\frac{5}{7}\times 5=\frac{25}{7}$（$cm$）.

故答案为：$\frac{25}{7}$.



【点评】此题重点考查菱形的性质、轴对称的性质、勾股定理、锐角三角函数与解直角三角形等知识，

正确地作出所需要的辅助线是解题的关键.

三、解答题（本大题共 11 小题，共 88 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. （7 分）计算$\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\div\frac{x-3}{x}$.

【分析】先利用异分母分式加减法法则计算括号里，再算括号外，即可解答.

【解答】解：$\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\div\frac{x-3}{x}$

$=\frac{x^2-9}{x^2}\cdot\frac{x}{x-3}$

$=\frac{(x+3)(x-3)}{x^2}\cdot\frac{x}{x-3}$

$=\frac{x+3}{x}$.

【点评】本题考查了分式的混合运算，准确熟练地进行计算是解题的关键.

18. （8分）解不等式组$\begin{cases}2x-1<0\\ \dfrac{x-1}{4}<\dfrac{x}{3}\end{cases}$，并写出它的整数解.

【分析】分别求出不等式组中两不等式的解集，找出两解集的公共部分确定出解集，进而确定出整数解即可.

【解答】解：$\begin{cases}2x-1<0①\\ \dfrac{x-1}{4}<\dfrac{x}{3}②\end{cases}$，

由①得：$x<\dfrac{1}{2}$，

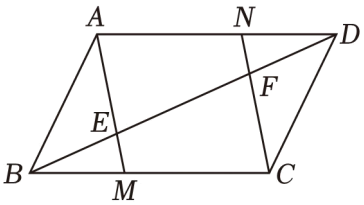
由②得：$x>-3$，

∴不等式组的解集为$-3<x<\dfrac{1}{2}$，

则原不等式组的整数解是－2，－1，0.

【点评】此题考查了一元一次不等式组的整数解，以及解一元一次不等式组，熟练掌握不等式组的解法是解本题的关键.

19. （7分）如图，在▱$ABCD$中，点M，N分别在边BC，AD上，且$AM\parallel CN$，对角线BD分别交AM，CN于点E，F．求证$BE=DF$.



【分析】连接AC交BD于O，根据平行四边形的性质得到$AO=OC$，$BO=DO$，根据全等三角形的性

质得到 $OE=OF$，于是得到结论.

【解答】证明：连接 AC 交 BD 于 O，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AO=OC$，$BO=DO$，

∵$AM\parallel CN$，

∴$\angle EAC=\angle FCA$，

在△AEO 与△CFO 中，

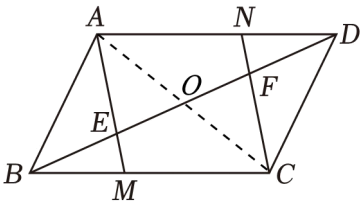
$$\begin{cases}\angle EAC=\angle FCO\\ AO=CO\\ \angle AOE=\angle COF\end{cases},$$

∴△$AOE\cong$△COF（ASA），

∴$OE=OF$，

∴$BO-OE=OD-OF$，

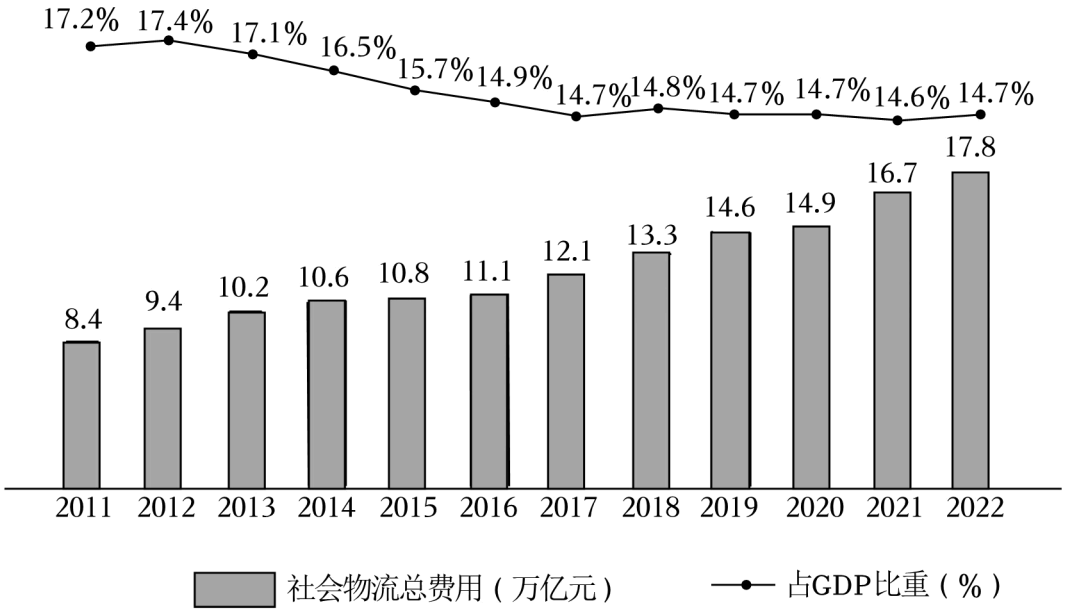
∴$BE=DF$.



【点评】本题考查了平行四边形的性质，全等三角形的判定和性质，正确地找出辅助线是解题的关键.

20. （8 分）社会运转和日常生活离不开物流行业的发展，阅读以下统计图并回答问题.

2011～2022年中国社会物流总费用及占GDP比重统计图



（1）下列结论中，所有正确结论的序号是 ①③ .

① 2011～2022 年社会物流总费用占 *GDP* 比重总体呈先下降后稳定的趋势;

② 2011～2016 年社会物流总费用的波动比 2017～2022 年社会物流总费用的波动大;

③ 2012～2022 年社会物流总费用逐年增加，其中增加的幅度最大的一年是 2021 年.

（2）请结合图片提供的信息，从不同角度写出两个与我国 *GDP* 相关的结论.

【分析】（1）根据统计图中社会物流费用和 *GDP* 比重统计图逐一分析作出判断即可;

（2）根据统计图中占 *GDP* 比重的百分比分析即可.

【解答】解：（1）2011～2022 年社会物流总费用占 *GDP* 比重总体呈先下降后稳定的趋势，故①正确;

2011～2016 年社会物流总费用的波动范围为 2.7，2017～2022 年社会物流总费用的波动范围为 5.7,

故 2011～2016 年社会物流总费用的波动比 2017～2022 年社会物流总费用的波动小，故②错误;

2012～2022 年社会物流总费用逐年增加，其中增加的幅度最大的一年是 2021 年，故③正确.

故正确的结论序号为：①③.

故答案为：①③；

（2）根据统计图可得，从 2011 年到 2022 年我国的 *GDP* 逐年稳步增加；

GDP 的循环规律是 5 到 7 年增长，2 年持平或衰退.

【点评】本题考查条形图和折线图，解题的关键是根据统计图正确获取信息.

21. （8 分）某旅游团从甲、乙、丙、丁 4 个景点中随机选取景点游览.

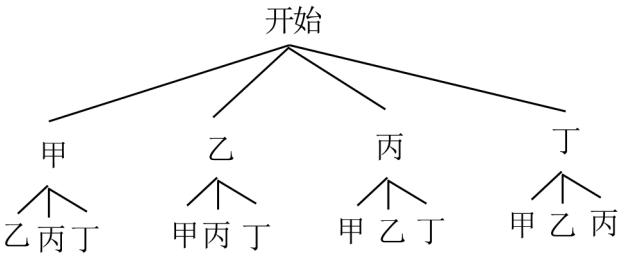
（1）选取 2 个景点，求恰好是甲、乙的概率；

（2）选取 3 个景点，则甲、乙在其中的概率为 $\frac{1}{2}$.

【分析】（1）画树状图，共有 12 种等可能的结果，其中恰好是甲、乙的结果有 2 种，再由概率公式求解即可；

（2）画树状图，有 24 种等可能的结果，其中甲、乙在其中的结果有 12 种，再由概率公式求解即可.

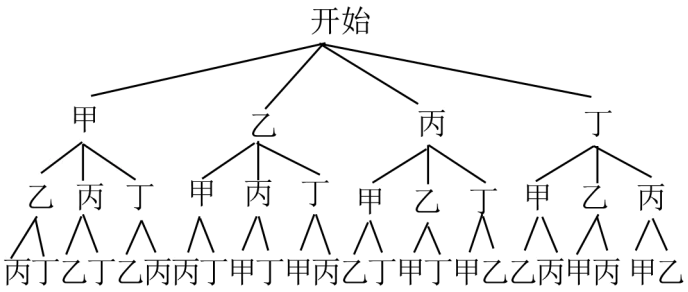
【解答】解：（1）画树状图如下：



共有 12 种等可能的结果，其中恰好是甲、乙的结果有 2 种，

∴恰好是甲、乙的概率=$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$;

（2）画树状图如下：



共有 24 种等可能的结果，其中甲、乙在其中的结果有 12 种，

∴甲、乙在其中的概率为$\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$，

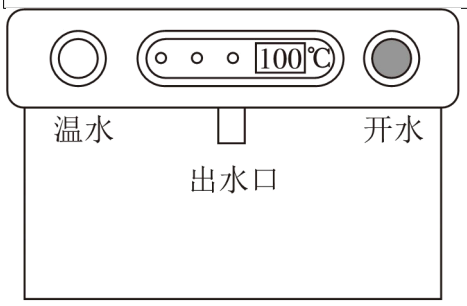
故答案为：$\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．列表法或树状图法可以不重复不遗漏地列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合于两步或两步以上完成的事件．用到的知识点为：概率＝所求情况数与总情况数之比.

22．（8 分）如图，某校的饮水机有温水、开水两个按钮，温水和开水共用一个出水口．温水的温度为 30℃，流速为 20*ml/s*；开水的温度为 100℃，流速为 15*ml/s*．某学生先接了一会儿温水，又接了一会儿开水，得到一杯 280*ml* 温度为 60℃的水（不计热损失），求该学生分别接温水和开水的时间.

物理常识 开水和温水混合时会发生热传递，开水放出的热量等于温水吸收的热量，可以转化为开水的体积×开水降

低的温度＝温水的体积×温水升高的温度.



【分析】设该学生接温水的时间为 xs，则接温水 $20xml$，开水（$280-20x$）ml，由物理常识的公式可得方程，解方程即可.

【解答】解：设该学生接温水的时间为 xs，接开水的时间为 ys，

根据题意可得：$\begin{cases}20x+15y=280\\15y\times40=20x\times30\end{cases}$，

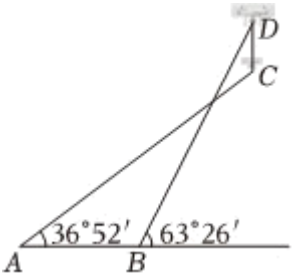
解得$\begin{cases}x=8\\y=8\end{cases}$

∴该学生接温水的时间为 $8s$，接开水的时间为 $8s$.

【点评】本题考查二元一次方程组的实际应用，理解题意，理清数量关系是解决问题的关键.

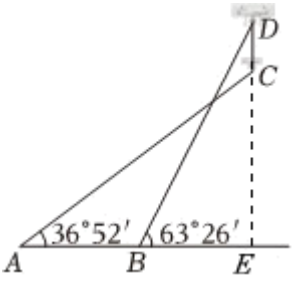
23. （8 分）如图，为了测量无人机的飞行高度，在水平地面上选择观测点 A，B．无人机悬停在 C 处，此时在 A 处测得 C 的仰角为 $36°52'$；无人机垂直上升 $5m$ 悬停在 D 处，此时在 B 处测得 D 的仰角为 $63°26'$．$AB=10m$，点 A，B，C，D 在同一平面内，A，B 两点在 CD 的同侧．求无人机在 C 处时离地面的高度.

（参考数据：$\tan36°52'\approx0.75$，$\tan63°26'\approx2.00$．）



【分析】延长 DC 交 AB 于点 E，根据题意可得：$DE\perp AB$，$CD=5m$，然后设 $BE=xm$，则 $AE=$（$10+x$）m，在 Rt△ACE 中，利用锐角三角函数的定义求出 CE 的长，再在 Rt△BDE 中，利用锐角三角函数的定义求出 DE 的长，最后根据 $DC+CE=DE$，列出关于 x 的方程进行计算，即可解答.

【解答】解：延长 DC 交 AB 于点 E,



由题意得：$DE\perp AB$，$CD=5m$,

设 $BE=xm$,

$\because AB=10m$,

$\therefore AE=AB+BE=$（$10+x$）m,

在 Rt△ACE 中，$\angle CAE=36°52'$,

$\therefore CE=AE\cdot\tan 36°52'\approx 0.75$（$10+x$）$m$,

在 Rt△BDE 中，$\angle DBE=63°26'$,

∴$DE=BE\cdot\tan63°26'\approx 2x$（$m$），

∵$DC+CE=DE$，

∴$5+0.75(10+x)=2x$，

解得：$x=10$，

∴$CE=0.75(10+x)=15$（m），

∴无人机在C处时离地面的高度约为$15m$.

【点评】本题考查了解直角三角形的应用－仰角俯角问题，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

24.（8分）如图，玻璃桌面与地面平行，桌面上有一盏台灯和一支铅笔，点光源O与铅笔AB所确定的平面垂直于桌面．在灯光照射下，AB在地面上形成的影子为CD（不计折射），$AB\parallel CD$.

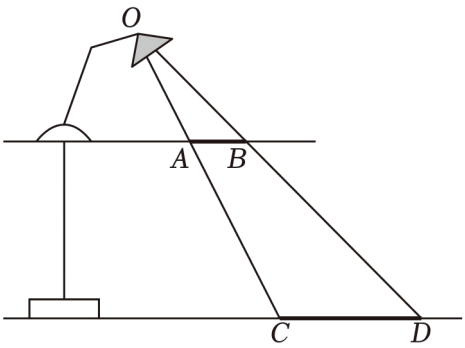
（1）在桌面上沿着AB方向平移铅笔，试说明CD的长度不变.

（2）桌面上一点P恰在点O的正下方，且$OP=36cm$，$PA=18cm$，$AB=18cm$，桌面的高度为$60cm$.

在点O与AB所确定的平面内，将AB绕点A旋转，使得CD的长度最大.

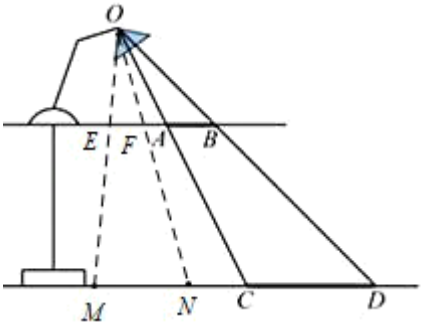
①画出此时AB所在位置的示意图；

②CD的长度的最大值为 __80__ cm.



【分析】（1）设AB平移到EF，EF在地面上形成的影子为MN．利用平行相似即可；（2）①以A为圆心，AB长为半径画圆，当OQ与⊙A相切于H时，此时CD最大为CQ．②先证明△GHA∽△GPO，再利用勾股定理求出AG＝30，由$\frac{OP}{\mathrm{OR}}=\frac{AG}{CQ}$，即可求出$CD$的长度的最大值．

【解答】解：（1）设AB平移到EF，EF在地面上形成的影子为MN．



∵AB∥CD，

∴△OAB∽△OCD，

△OEF∽△OMN，

△OEB∽△OMD，

$\therefore \frac{AB}{CD}=\frac{OB}{OD}$，$\frac{EF}{MN}=\frac{OE}{OM}$，$\frac{OB}{OD}=\frac{OE}{OM}$，

$\therefore \frac{EF}{MN}=\frac{AB}{CD}$，

∵$EF=AB$,

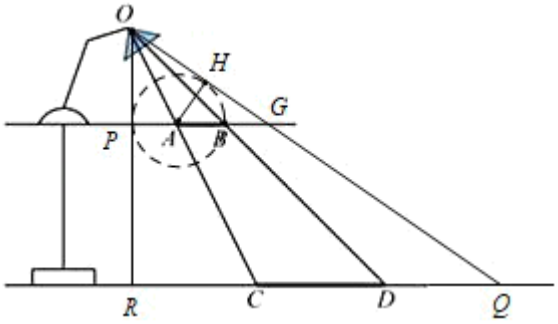
∴$MN=CD$,

∴沿着AB方向平移时，CD长度不变.

（2）①以A为圆心，AB长为半径画圆,

当OQ与⊙A相切于H时，此时CD最大为CQ.

此时AB所在位置为AH.



②∵$\angle HGA=\angle PGO$，$\angle AHG=\angle OPG=90°$,

∴$\triangle GHA\backsim\triangle GPO$,

∴$\frac{GA}{GO}=\frac{AH}{OP}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$,

∴设$GA=x$，则$GO=2x$,

在Rt$\triangle OPG$中,

$OP^2+PG^2=OG^2$,

∴$36^2+(18+x)^2=(2x)^2$,

∴$x^2-12x-540=0$,

∴x_1＝30，x_2＝－18（舍去），

∴AG＝30，

由①$\frac{OP}{\mathrm{OR}}=\frac{AG}{CQ}$，

∴$\frac{36}{36+60}=\frac{30}{CQ}$，

∴CQ＝80，

即CD的长度的最大值为80cm.

【点评】本题考查了相似三角形的应用，正确写出比例式，并进行换算是解题关键.

25. （8分）已知二次函数$y=ax^2-2ax+3$（a为常数，$a\neq0$）.

（1）若$a<0$，求证：该函数的图象与x轴有两个公共点.

（2）若$a=-1$，求证：当$-1<x<0$时，$y>0$.

（3）若该函数的图象与x轴有两个公共点（x_1，0），（x_2，0），且$-1<x_1<x_2<4$，则a的取值范围是 <u>$a>3$或$a<-1$</u> .

【分析】（1）证明$b^2-4ac>0$即可解决问题.

（2）将$a=-1$代入函数解析式，进行证明即可.

（3）对$a>0$和$a<0$进行分类讨论即可.

【解答】证明：（1）因为$(-2a)^2-4\times a\times3=4a^2-12a$，

又因为$a<0$，

所以$4a<0$，$a-3<0$,

所以$4a^2-12a=4a(a-3)>0$,

所以该函数的图象与x轴有两个公共点.

（2）将$a=-1$代入函数解析式得,

$y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$,

所以抛物线的对称轴为直线$x=1$，开口向下.

则当$-1<x<0$时,

y随x的增大而增大,

又因为当$x=-1$时，$y=0$,

所以$y>0$.

（3）因为抛物线的对称轴为直线$x=-\frac{-2a}{2a}=1$，且过定点（0，3），

又因为该函数的图象与x轴有两个公共点（x_1，0），（x_2，0），且$-1<x_1<x_2<4$,

所以当$a>0$时,

$a-2a+3<0$,

解得$a>3$,

故$a>3$.

当$a<0$时,

$a+2a+3<0$,

解得 $a<-1$,

故 $a<-1$.

综上所述，$a>3$ 或 $a<-1$.

故答案为：$a>3$ 或 $a<-1$.

【点评】本题考查二次函数的图象和性质，熟知二次函数的图象和性质是解题的关键.

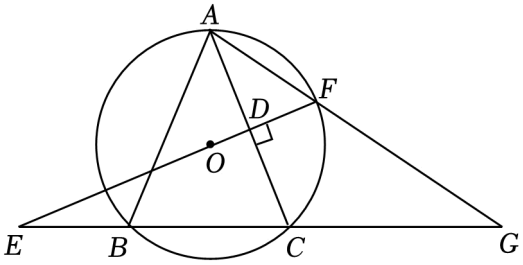
26. （9 分）如图，在△ABC 中，$AB=AC$，⊙O 是△ABC 的外接圆，过点 O 作 AC 的垂线，垂足为 D，

分别交直线 BC，$\overset{\frown}{AC}$于点 E，F，射线 AF 交直线 BC 于点 G.

（1）求证 $AC=CG$.

（2）若点 E 在 CB 的延长线上，且 $EB=CG$，求∠BAC 的度数.

（3）当 $BC=6$ 时，随着 CG 的长度的增大，EB 的长度如何变化？请描述变化过程，并说明理由.



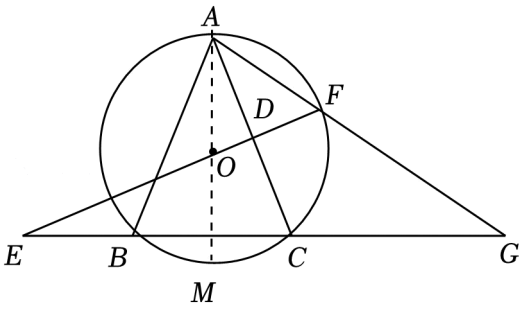
【分析】（1）作直径作 AM，根据垂径定理得 $AC\perp EF$，根据等腰三角形的性质和三角形的外角即可

得到结论；

（2）连接 AE，过 A 作 $AH\perp BC$ 于 H，根据等腰三角形的性质和三角形内角和定理即可得到结论；

（3）分三种情况讨论：当 $CG=6$，当 $CG\geqslant 6$，当 $3<CG<6$，再根据相似证明即可.

【解答】（1）证明：过 A 作直径 AM，



$\because AB=AC$，

$\therefore AM\perp BC$，

$\therefore \angle E+\angle EOM=90°$，

$\because AC\perp EF$，

$\therefore \angle OAD+\angle AOD=90°$，

$\therefore \angle E=\angle OAD$，

$\because OA=OF$，

$\therefore \angle OAD+\angle DAF=\angle AFO=\angle E+\angle G$，

$\therefore \angle DAF=\angle G$，

$AC=CG$；

（2）解：$\because AB=AC$，$AM\perp BC$，

$\therefore \angle BAM=\angle CAM$，

设$\angle BAM=\angle CAM=2\alpha$,

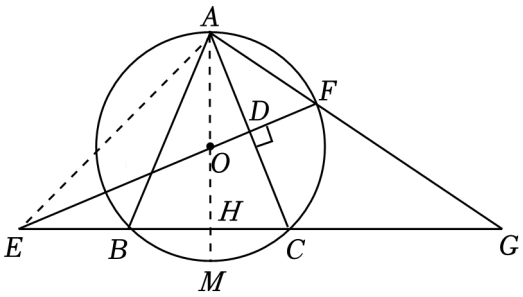
$\therefore \angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}(180°-\angle BAC)=90°-2\alpha$,

$\because AC=CG$,

$\therefore \angle CAG=\angle CGA=45°-\alpha$,

$\therefore \angle BAG=2\alpha+2\alpha+45°-\alpha=45°+3\alpha$,

如图：过A作直径AM，交BC于点H，连接AE,



$\because EF\perp AC$，又EF过圆心,

$\therefore EF$垂直平分AC,

$\therefore EC=AE$,

$\because BH=HC$，又$EB=CG$,

$\therefore HE=HG$,

$\therefore AM$垂直平分EG,

$\therefore AE=AG$,

$\therefore EC=AG$,

∵$EB=CG$,

∴$EB+BC=BC+CG$,

∴$EC=BG$,

∴$AG=BG$,

∴$\angle BAG=\angle ABG$,

∴$45°+3\alpha=90°-2\alpha$,

∴$\alpha=9°$,

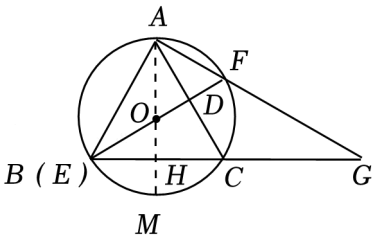
∴$\angle BAC=4\alpha=36°$;

（3）答：当 $CG=6$，$BE=0$；

当 $CG\geqslant 6$ 时，BE 随 CG 的增大而增大；

当 $3<CG<6$ 时，BE 随 CG 的增大而减小.

说明：①当 $BE=0$ 时，即点 E 与 B 重合，



在△BOH 和△AOD 中，

$$\begin{cases}\angle BHO=\angle ADO\\ \angle BOH=\angle AOD,\\ OB=OA\end{cases}$$

∴△BOH≌△AOD（AAS），

∴AD＝BH＝3,

∴AC＝2AD＝6,

∴AB＝AC＝BC＝6,

∴△ABC为等边三角形,

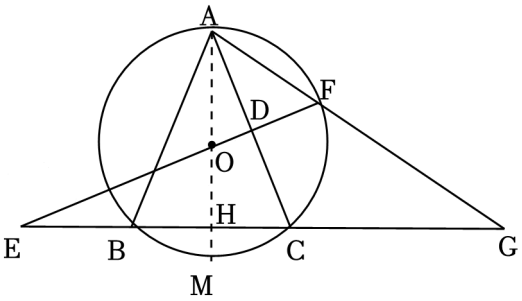
∴∠BAC＝∠ACB＝60°,

∴∠CAG＝30°，∠CAG+∠G＝60°,

∴∠G＝30°＝∠CAG,

∴CA＝CG＝6;

②当CG≥6时，如图:



∵∠E＝∠CAH，∠EDC＝∠AHC＝90°,

∴△ACH∽△ECD,

∴$\frac{HC}{AC}=\frac{CD}{EC}$,

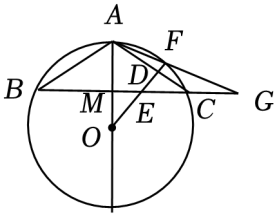
$\therefore \dfrac{3}{AC}=\dfrac{\frac{AC}{2}}{EC}$,

$\therefore \dfrac{3}{CG}=\dfrac{\frac{CG}{2}}{BE+6}$,

$\therefore BE=\dfrac{1}{6}CG^2-6$,

$\therefore BE$ 随 CG 的增大而增大.

③当 $3<CG<6$ 时，如图,



$\because \angle ACM=\angle DCE$，$\angle EDC=\angle AMC=90°$,

$\therefore \triangle AMC\backsim\triangle EDC$,

$\therefore \dfrac{MC}{AC}=\dfrac{CD}{CE}$,

$\therefore \dfrac{3}{AC}=\dfrac{\frac{AC}{2}}{BC-BE}$,

$\therefore \dfrac{3}{CG}=\dfrac{\frac{CG}{2}}{6-BE}$,

$\therefore BE=-\dfrac{1}{6}CG^2+6$,

$\therefore BE$ 随 CG 的增大而减小.

综上所述:

当 $CG \geqslant 6$ 时，BE 随 CG 的增大而增大；

当 $3 < CG < 6$ 时，BE 随 CG 的增大而减小.

【点评】本题考查了圆的性质，三角形的外接圆，等腰三角形的性质，垂径定理，正确地作出辅助线是解题的关键.

27. （9 分）在平面内，将一个多边形先绕自身的顶点 A 旋转一个角度 θ（$0° < \theta < 180°$），再将旋转后的多边形以点 A 为位似中心放大或缩小，使所得多边形与原多边形对应线段的比为 k，称这种变换为自旋转位似变换. 若顺时针旋转，记作 T（A，顺 θ，k）；若逆时针旋转，记作 T（A，逆 θ，k）.

例如：如图①，先将 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 $50°$，得到 $\triangle A_1BC_1$，再将 $\triangle A_1BC_1$ 以点 B 为位似中心缩小到原来的 $\frac{1}{2}$，得到 $\triangle A_2BC_2$，这个变换记作 T（B，逆 $50°$，$\frac{1}{2}$）.

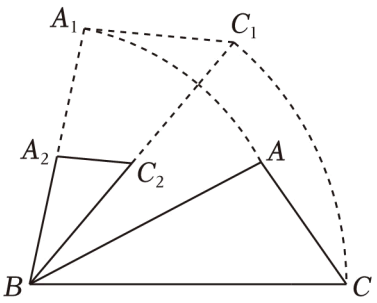
（1）如图②，$\triangle ABC$ 经过 T（C，顺 $60°$，2）得到 $\triangle A'B'C$，用尺规作出 $\triangle A'B'C$. （保留作图痕迹）

（2）如图③，$\triangle ABC$ 经过 T（B，逆 α，k_1）得到 $\triangle EBD$，$\triangle ABC$ 经过 T（C，顺 β，k_2）得到 $\triangle FDC$，连接 AE，AF. 求证：四边形 $AFDE$ 是平行四边形.

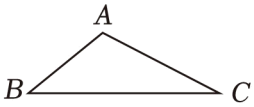
（3）如图④，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 150°$，$AB = 2$，$AC = 1$. 若 $\triangle ABC$ 经过（2）中的变换得到的四边形 $AFDE$ 是正方形.

Ⅰ. 用尺规作出点 D（保留作图痕迹，写出必要的文字说明）；

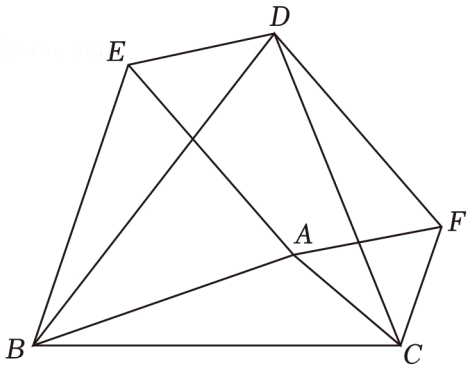
Ⅱ. 直接写出 AE 的长.



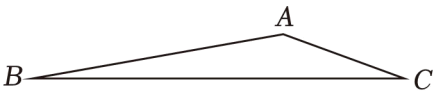
①



②



③



④

【分析】（1）旋转 60°，可作等边三角形 DBC，ACE，从而得出 B 点和点 A 对应点 D，E，进而作出图形；

（2）根据△EBD 和△ABC 位似，△FDC 与△ABC 位似得出∠EBD＝∠ABC，$\frac{BE}{AB}=\frac{BD}{BC}$，$\frac{DF}{CD}=\frac{AB}{BC}$，进而推出△$EBA$∽△$DBC$，从而$\frac{AE}{CD}=\frac{AB}{BC}$，进而得出 AE＝DF，同理可得：DE＝AF，从而推出四边形 $AFDE$ 是平行四边形；

（3）要使▱$AFDE$ 是正方形，应使∠EAF＝90°，AE＝AF，从而得出∠BAE+∠FAC＝270° - ∠BAC＝120°，从而得出∠DBC+∠DCB＝120°，从而∠BDC＝60°，于是作等边△BCG，保证∠BDC＝∠G＝60°，作直径 BD，保证 BD＝2CD，这样得出作法.

【解答】（1）解：如图 1，

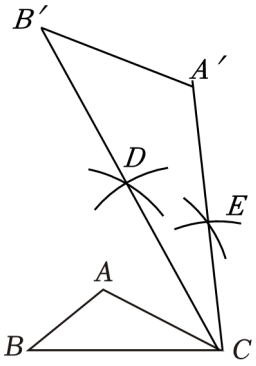


图1

1．以 B 为圆心，BC 为半径画弧，以 C 为圆心，BC 为半径画弧，两弧在 BC 的上方交于点 D，分别以

A，C 为圆心，以 AC 为半径画弧，两弧交于点 E，

2．延长 CD 至 B'，使 $DB'=CD$，延长 CE 至 A'，使 $A'E=CE$，连接 $A'B'$，

则 $\triangle A'B'C$ 就是求作的三角形；

（2）证明：$\because \triangle EBD$ 和 $\triangle ABC$ 位似，$\triangle FDC$ 与 $\triangle ABC$ 位似，

$\therefore \angle EBD=\angle ABC$，$\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{BD}{BC}$，$\dfrac{DF}{CD}=\dfrac{AB}{BC}$，

$\therefore \angle EBA=\angle DBC$，

$\therefore \triangle EBA\backsim\triangle DBC$，

$\therefore \dfrac{AE}{CD}=\dfrac{AB}{BC}$，

$\therefore \dfrac{AE}{CD}=\dfrac{DF}{CD}$，

$\therefore AE=DF$，

同理可得：$DE=AF$，

∴四边形 $AFDE$ 是平行四边形;

（3）解：Ⅰ如图 2,

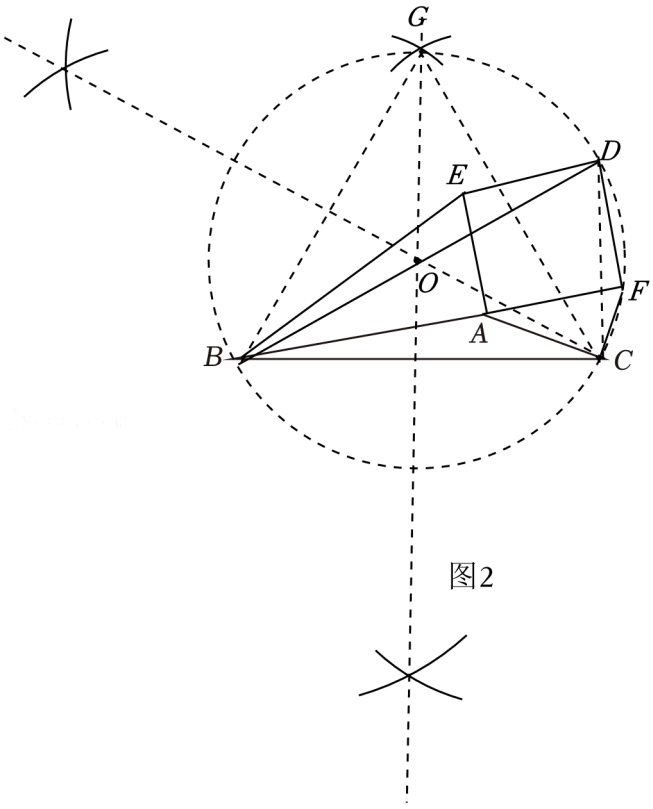


图2

1．以 BC 为边在 BC 上方作等边三角形 GBC,

2．作等边三角形 BCG 的外接圆 O，作直径 BD，连接 CD,

3．作$\angle DBE=\angle ABC$，$\angle BDE=\angle ACB$，延长 BA，交⊙O 于 F，连接 CF，DF,

则四边形 $AFDE$ 是正方形,

Ⅱ证明：由上知：$\triangle EBA\backsim\triangle DBC$，$\triangle FAC\backsim\triangle DBC$,

$\therefore\angle BAE=\angle DCB$，$\angle FAC=\angle DBC$，$\frac{AE}{CD}=\frac{AB}{BC}=\frac{2}{BC}$，$\frac{AF}{BD}=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{BC}$,

$\therefore\angle BAE+\angle FAC=\angle DCB+\angle DBC$,

要使▱*AFDE*是正方形，应使∠*EAF*＝90°，*AE*＝*AF*，

∴∠*BAE*+∠*FAC*+∠*BAC*＝270°，*BD*＝2*CD*，

∴∠*BAE*+∠*FAC*＝270°﹣∠*BAC*＝270°﹣150°＝120°，

∴∠*DBC*+∠*DCB*＝120°，

∴∠*BDC*＝60°，

∴作等边△*BCG*，保证∠*BDC*＝∠*G*＝60°，作直径*BD*，保证*BD*＝2*CD*，这样得出作法；

∵∠*ABE*＝∠*DBC*＝30°，∠*EAB*＝∠*BCD*＝90°，*AB*＝2，

∴$AE=\frac{\sqrt{3}}{3}AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质，圆周角定理，确定圆的条件，尺规作图等知识，解决问题的关键是较强的分析能力.