参考答案

2026年南京市中考数学试卷（回忆版）

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分.在每小题所给出的四个选项中，恰有一项是符合题目要求的，请将正确选项前的字母代号填涂在答题卡相应位置上）

1.（2 分）﹣2 的相反数为（　　）

A．2　　B．﹣2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

【分析】根据符号不同，绝对值相同的两个数互为相反数即可求得答案.

【解答】解：﹣2 的相反数为 2.

故选：*A*.

【点评】本题考查了相反数的概念，掌握只有符号不同的两个数叫做互为相反数是解答此题的关键.

2.（2 分）以下计算结果中，最大的是（　　）

A．（﹣3）×1　　B．$|-\frac{1}{4}|$　　C．$-\frac{1}{3}$　　D．3^{-1}

【分析】根据负整数指数幂，绝对值的定义，有理数的大小比较进行解答即可.

【解答】解：∵（﹣3）×1＝﹣3，$|-\frac{1}{4}|=\frac{1}{4}$，$3^{-1}=\frac{1}{3}$，

$\therefore \frac{1}{3}>\frac{1}{4}>-\frac{1}{3}>-3$，

故选：*D*.

【点评】本题考查负整数指数幂，绝对值的定义，有理数的大小，掌握负整数指数幂，绝对值的定义，有理数的大小比较方法是正确解答的关键.

3.（2 分）下面四个点离 y 轴最近的是（　　）

A．（2，3）　　B．（﹣3，2）　　C．$(-\sqrt{2},-\sqrt{3})$　　D．$(\sqrt{3},-\sqrt{2})$

【分析】根据题意，分别求出选项中各点离 y 轴的距离，据此进行比较即可.

【解答】解：由题知，

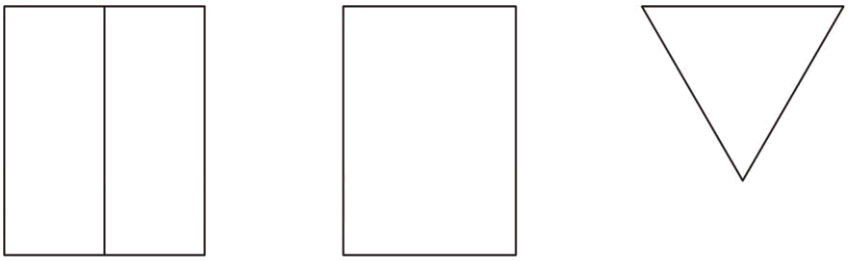
因为（2，3）离 y 轴的距离为 2，点（﹣3，2）离 y 轴的距离为 3，点$(-\sqrt{2},-\sqrt{3})$离 y 轴的距离为$\sqrt{2}$，点$(\sqrt{3},-\sqrt{2})$离 y 轴的距离为$\sqrt{3}$且$\sqrt{2}<\sqrt{3}<2<3$，

所以离 y 轴最近的是点$(-\sqrt{2},-\sqrt{3})$.

故选：*C*.

【点评】本题主要考查了坐标与图形性质，熟知点到 y 轴距离的计算公式是解题的关键.

4.（2 分）一个几何体的三视图如下，则这个几何体是（　　）



主视图　　左视图　　俯视图

A．三棱锥　　B．三棱柱　　C．四棱锥　　D．四棱柱

【分析】由主视图和左视图确定是柱体，锥体还是球体，再由俯视图确定具体形状．

【解答】解：根据主视图和左视图为矩形判断出是柱体，根据俯视图是三角形可判断出这个几何体应该是三棱柱．

故选：*B*．

【点评】本题考查由三视图判断几何体，解题的关键是掌握相关知识的灵活运用．

5．（2 分）跳绳成绩，甲组平均 96 个，乙组平均 100 个，丙组平均 104 个，最后全部平均成绩 102 个，问哪组人数最多（　　）

A．甲组人数最多　　B．乙组人数最多

C．丙组人数最多　　D．三组人数一样多

【分析】根据加权平均数解答即可．

【解答】解：设甲组 x 人，乙组 y 人，丙组 z 人，根据题意得：

$\frac{96x+100y+104z}{x+y+z}=102$，

∴$102x+102y+102z=96x+100y+104z$，

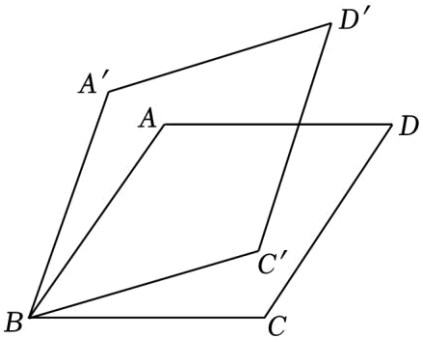
∴$6x+2y=2z$，

∴丙组人数最多．

故选：*C*．

【点评】本题考查了加权平均数，掌握加权平均数公式是解答本题的关键．

6．（2 分）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle B=54°$，现将菱形 $ABCD$ 绕点 B 逆时针旋转 16°得菱形 $A'BC'D'$，连接 DD'，则 $\angle D'DC=$（　　）



A．108°　　B．109°　　C．110°　　D．111°

【分析】连接 BD、BD'，DD'，如图，先根据菱形的性质得到$\angle ADC=\angle ABC=54°$，则$\angle BDC=27°$，再根据旋转的性质得到 $BD'=BD$，$\angle D'BD=16°$，接着根据等腰三角形的性质和三角形内角和定理计算出$\angle BDD'=\angle BD'D=82°$，然后计算$\angle BDD'+\angle BDC$ 即可．

【解答】解：连接 BD、BD'，DD'，如图，

∵四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴$\angle ADC=\angle ABC=54°$，

∴$\angle BDC=\frac{1}{2}\angle ADC=27°$，

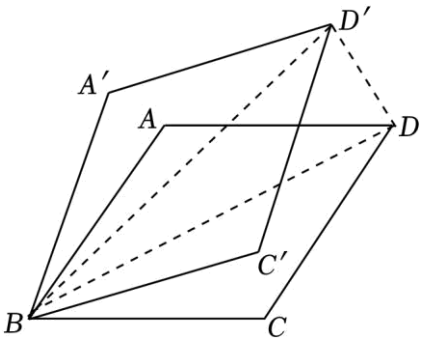
∵菱形 $ABCD$ 绕点 B 逆时针旋转 16°得菱形 $A'BC'D'$，

∴$BD'=BD$，$\angle D'BD=16°$，

∴$\angle BDD'=\angle BD'D=\frac{1}{2}\times(180°-16°)=82°$，

∴$\angle D'DC=\angle BDD'+\angle BDC=82°+27°=109°$．

故选：B．



【点评】本题考查了旋转的性质：对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角；旋转前、后的图形全等．也考查了菱形的性质．

二、填空题（本大题共 9 小题，每小题 2 分，共 20 分.请把答案填写在答题卡相应位置上）

7．（2 分）在数轴上表示 - 2 的点与表示 3 的点之间的距离是 5 ．

【分析】根据正负数的运算方法，用 3 减去 - 2，求出在数轴上表示 - 2 的点与表示 3 的点之间的距离为多少即可.

【解答】解：3 -（ - 2）

＝3+2

＝5.

所以在数轴上表示 - 2 的点与表示 3 的点之间的距离为 5.

故答案为：5.

【点评】此题主要考查了正负数的运算方法，关键是根据在数轴上表示 - 2 的点与表示 3 的点之间的距离列出式子.

8.（2 分）比较大小：7.9×10^{10} ＿＜＿ 1.1×10^{11}.

【分析】根据科学记数法比较大小即可.

【解答】解：$7.9\times10^{10}=79000000000$，$1.1\times10^{11}=110000000000$，

∴$7.9\times10^{10}<1.1\times10^{11}$.

故答案为：＜.

【点评】此题主要考查了有理数的大小比较以及科学记数法，掌握科学记数法是解答本题的关键.

9.（2 分）计算：$(\sqrt{8}-\sqrt{\frac{9}{2}})\times\sqrt{2}=$＿1＿.

【分析】利用乘法分配律进行计算，即可解答.

【解答】解：原式$=\sqrt{8}\times\sqrt{2}-\sqrt{\frac{9}{2}}\times\sqrt{2}$

$=\sqrt{16}-\sqrt{9}$

＝4 - 3

＝1，

故答案为：1.

【点评】本题考查了二次根式的混合运算，准确熟练地进行计算是解题的关键.

10.（2 分）一定质量的二氧化碳的体积和压强成反比例函数关系，当体积为 4 时，压强为 1.5；当 4 换成 3，1.5 对的位置换成＿2＿.

【分析】先根据已知条件求出 p 与 V 的函数解析式，再结合反比例函数性质解题即可.

【解答】解：设 $P=\frac{k}{V}$（$k\neq0$），

将 $V=4$，$P=1.5$ 代入得 $1.5=\frac{k}{4}$，解得 $k=6$，

∴函数解析式为 $P=\frac{6}{V}$，

∴当 $V=3$ 时，$P=\frac{6}{3}=2$，

故当 4 换成 3，1.5 对的位置换成 2．

故答案为：2．

【点评】本题考查了反比例函数的应用，理解题意，熟练掌握反比例函数性质是关键．

11．（2 分）计算：$(a^3)^2\div a^2=$ <u>a^4</u> ．

【分析】根据幂的乘方与同底数幂相除的法则计算便可．

【解答】解：$(a^3)^2\div a^2=a^6\div a^2=a^4$，

故答案为：a^4．

【点评】本题主要考查了幂的乘方与同底数幂的除法，熟记运算法则是解题的关键．

12．（2 分）正九边形，任意顺次连接某几个顶点恰好构成一个正 n 边形，求 n 可以是 <u>3 或 9</u> （任写一个符合的）．

【分析】求出正九边形的外接圆圆心，表示出相邻顶点对应的圆心角度数即可．

【解答】解：∵正九边形，

∴外接圆对应的圆心角为：$\frac{360°}{9}=40°$，

∵顺次连接正九边形的若干顶点得到的正 n 边形，顶点必然也落在这个外接圆上，

∴它的相邻顶点对应的圆心角为$\frac{360°}{n}$，该角度必须是 40° 的正整数倍，

即存在正整数 k 满足：$k\times 40°=\frac{360°}{n}$，整理可得 $k\times n=9$，

9 的正整数因数中，满足多边形边数 $n\geq 3$ 的取值只有 3 和 9，

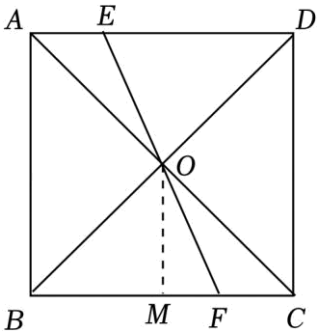
故答案为：3 或 9．

【点评】本题主要考查了多边形内角与外角，掌握其相关知识点是解题的关键．

13．（2 分）正方形 $ABCD$ 中，点 O 为对称中心，EF 过点 O 且点 E 在 AD 上，点 F 在 BC 上，$BF=3$，$CF=1$．则 $EF=$ <u>$2\sqrt{5}$</u> ．

【分析】根据题意，画出示意图，再结合正方形的性质进行计算即可．

【解答】解：如图所示，



过点 O 作 BC 的垂线，垂足为 M，

∵$BF=3$，$CF=1$，

∴$BC=3+1=4$.

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AC\perp BD$，$OB=OC$，

∴$BM=CM=\frac{1}{2}BC=2$，

则 $OM=\frac{1}{2}BC=2$，

∴$MF=CM-CF=2-1=1$.

在 Rt△OMF 中，

$OF=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

∵正方形 $ABCD$ 是中心对称图形且点 O 为其对称中心，

∴$EF=2OF=2\sqrt{5}$.

故答案为：$2\sqrt{5}$.

【点评】本题主要考查了中心对称及正方形的性质，熟知正方形的性质是解题的关键.

14.（2 分）二次函数 $y=ax^2+bx$（$a<0$）过点（-1，m），（1，$m+2$），则 m 的取值范围为 $m<-1$.

【分析】依据题意，由二次函数 $y=ax^2+bx$（$a<0$）过点（-1，m），（1，$m+2$），则 $a-b=m$ 且 $a+b=m+2$，从而 $a=m+1<0$，进而计算可以得解.

【解答】解：由题意，∵二次函数 $y=ax^2+bx$（$a<0$）过点（-1，m），（1，$m+2$），

∴$a-b=m$ 且 $a+b=m+2$，

∴$2a=2m+2$.

∴$a=m+1<0$.

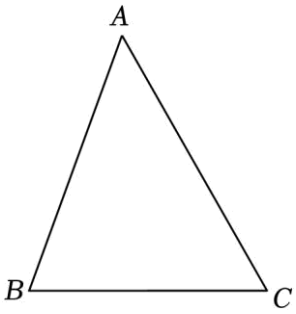
∴$m<-1$.

故答案为：$m<-1$.

【点评】本题主要考查了二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的图象与性质，解题时要熟练掌握并

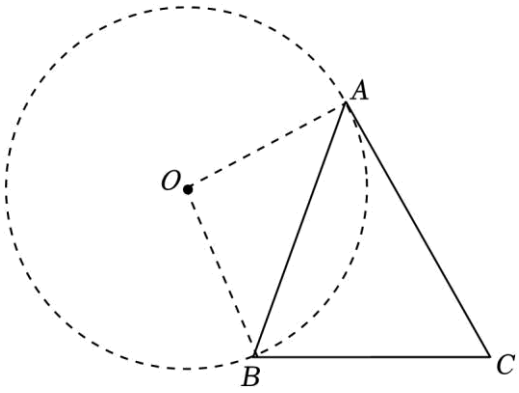
能灵活运用二次函数的性质是关键.

15.（2 分）如图，在△ABC 中，$\angle A=50°$，$\angle B=70°$，以 A、B 两点为端点作圆弧，使得弧 AB 上所有的点都落在△ABC的边界及内部，则弧 AB 所对的圆心角$\angle AOB$的取值范围是 $0°<\angle AOB\leqslant 100°$.



【分析】依题意画出图形，找出临界值求解即可.

【解答】解：如图，



由题意可知 $OA=OB$，

则圆心 O 点在 AB 的垂直平分线上；然后，

当$\angle OAC<90°$，$\overset{\frown}{AB}$会与 AC 线段有 2 个交点，当$\angle OBC<90°$，$\overset{\frown}{AB}$会与 BC 线段有 2 个交点，

∴要使得$\overset{\frown}{AB}$上所有点落在△ABC 的边界及内部，只要使$\angle OAC\geqslant 90°$且$\angle OBC\geqslant 90°$，

当$\angle OAC\geqslant 90°$时，$\angle OAB\geqslant \angle OAC-\angle BAC=90°-50°=40°$，

∴$\angle AOB\leqslant 180°-\angle OAB-\angle OBA=100°$.

综上，$0°<\angle AOB\leqslant 100°$；

故答案为：$0°<\angle AOB\leqslant 100°$.

【点评】本题主要考查了圆周角定理、圆心角、弧、弦的关系等内容，熟练掌握相关知识是解题的关键.

三、解答题（本大题共 10 小题，共 88 分，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

16. 化简：$(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\div\frac{x^2-y^2}{2xy}$.

【分析】先利用异分母分式加减法法则计算括号里，再算括号外，即可解答.

【解答】解：原式=$\frac{y+x}{xy}\cdot\frac{2xy}{(x+y)(x-y)}$

$=\frac{2}{x-y}$.

【点评】本题考查了分式的混合运算，准确熟练地进行计算是解题的关键.

17．求证：当 n 为整数时，$(n+2)^2-(3n+4)$ 能被 2 整除.

【分析】先把原式展开、合并同类项，化简得到 n^2+n；对化简后的式子因式分解，得到 $n(n+1)$；因为 n 是整数，n 和 $n+1$ 是连续整数，必有一个是偶数，所以这个乘积能被 2 整除，即可得证.

【解答】解：$(n+2)^2-(3n+4)$

$=n^2+4n+4-3n-4$

$=n^2+n$

$=n(n+1)$，

因为 n 为整数，

所以 n、$n+1$ 是相邻两个连续整数，

所以两数一共是一奇一偶，

所以 $n(n+1)$ 是偶数，

所以 $(n+2)^2-(3n+4)$ 能被 2 整除.

【点评】本题考查因式分解的应用，解决本题的关键是先将原式展开并合并同类项，再分析结果是否能被 2 整除.

18．已知两直线 $y_1=kx+1$ 与 $y_2=-2x+b$ 交于（1，2），

（1）计算 k 和 b 的值；

（2）若 $y_1>y_2$，求 x 的取值范围.

【分析】（1）将点（1，2）分别代入两个函数解析式进行计算即可；

（2）根据题意得出关于 x 的不等式，据此进行求解即可.

【解答】解：（1）由题知，

因为两直线 $y_1=kx+1$ 与 $y_2=-2x+b$ 交于（1，2），

所以 $k+1=2$，$-2+b=2$，

解得 $k=1$，$b=4$；

（2）由（1）知，

两直线的函数解析式为 $y_1=x+1$ 与 $y_2=-2x+4$，

因为 $y_1>y_2$，

所以 $x+1>-2x+4$，

解得 $x>1$，

所以 x 的取值范围是 $x>1$.

【点评】本题主要考查了一次函数与一元一次不等式、一次函数的性质及两条直线相交或平行问题，熟知一次函数的图象与性质是解题的关键.

19．一个袋子里装有红球，白球各一个，摸出其中一个球之后再次放回，然后再摸一次，若两次摸出的球的颜色不同，我们将其对应的概率记为 P_1，若一个袋子中装有红球 10 个，白球 20 个，摸出其中一个球之后再次放回，然后再摸一次，若两次摸出的球的颜色不同，我们将其对应的概率记为 P_2.

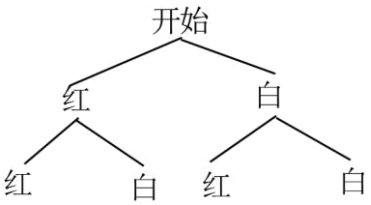
（1）求 P_1 的值；

（2）比较 P_1 与 P_2 的大小.

【分析】（1）先画树状图展示所有 4 种等可能的结果，再找出两次摸出的球的颜色不同得结果数，然后根据概率公式得到 $P_1=\frac{1}{2}$；

（2）利用概率公式计算出 $P_2=\frac{10\times20+20\times10}{30\times30}=\frac{4}{9}$，从而可比较 P_1 与 P_2 的大小.

【解答】解：（1）画树状图为：



共有 4 种等可能的结果，其中两次摸出的球的颜色不同得结果数为 2，

所以 $P_1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$；

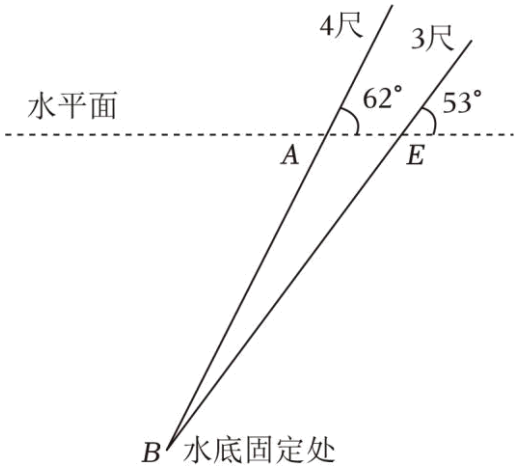
（2）根据题意得 $P_2=\frac{10\times20+20\times10}{30\times30}=\frac{4}{9}$，

而$\frac{1}{2}>\frac{4}{9}$，

$\therefore P_1>P_2$.

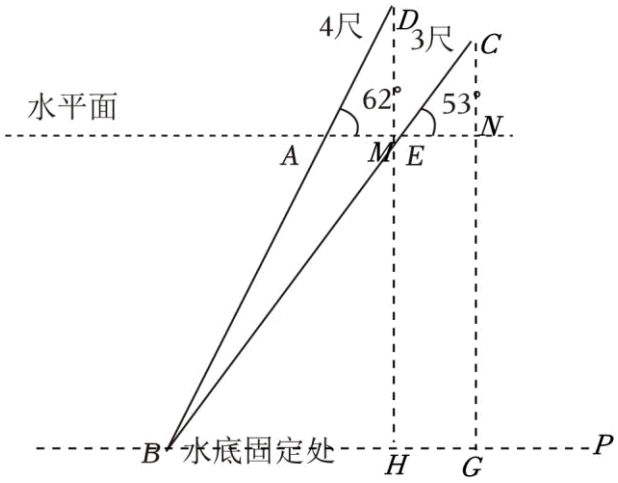
【点评】本题考查了列表法与树状图法：利用列表法或树状图展示所有可能的结果求出 n，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m，然后利用概率公式求出事件 A 或 B 的概率．也考查了概率公式.

20．一支竹竿插在水底固定处，第一次露出水平面 3 尺，第二次露出水平面 4 尺，已知两次与水平面的夹角分别是 53° 与 62°，求竹竿的长度与水底固定处到水平面的距离.（$\sin53°\approx\frac{4}{5}$，$\sin62°\approx\frac{8}{9}$）



【分析】如图，过 B 作 $BP\parallel AE$，过 D 作 $DH\perp BP$ 于 H 交 AE 于 M，过 E 作 $EG\perp BP$ 于 G，交 AE 于 N，得到四边形 $MHGN$ 是矩形，根据矩形的性质得到 $MH=NG$，$\angle EBG=\angle CEN=53°$，$\angle DAM=\angle DBH=62°$，设 $BD=BC=x$ 尺，解直角三角形即可得到结论．

【解答】解：如图，过 B 作 $BP\parallel AE$，过 D 作 $DH\perp BP$ 于 H 交 AE 于 M，过 C 作 $CG\perp BP$ 于 G，交 AE 于 N，



则四边形 $MHGN$ 是矩形，

$\therefore MH=NG$，$\angle EBG=\angle CEN=53°$，$\angle DAM=\angle DBH=62°$，

设 $BD=BC=x$ 尺，

在 Rt$\triangle DAM$ 中，$DM=AD\cdot\sin\angle DAM=4\times\sin62°\approx4\times\frac{8}{9}=\frac{32}{9}$（尺），

在 Rt$\triangle DBH$ 中，$DH=BD\cdot\sin\angle DBH=x\times\sin62°\approx\frac{8}{9}x$（尺），

在 Rt$\triangle CEN$ 中，$CN=CE\cdot\sin\angle CEN=3\times\sin53°\approx3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$（尺），

在 Rt$\triangle CBG$ 中，$CG=BC\cdot\sin\angle CBG=x\times\sin53°\approx\frac{4}{5}x$（尺），

$\therefore \frac{8}{9}x-\frac{32}{9}=\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}$，

$\therefore x=13$，

$\therefore \frac{8}{9}x-\frac{32}{9}=8$，

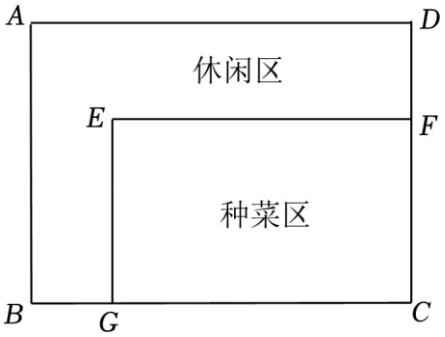
答：竹竿的长度为 13 尺，水底固定处到水平面的距离为 8 尺．

【点评】本题考查了解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题，正确地作出辅助线是解题的关键．

21．如图，四边形 $ABCD$ 和 $EFCG$ 均为矩形，$AD=9m$，$AB=6m$，$BG=DF=xm$，休闲区的储水量为 $3L/m^2$．

（1）种菜区的面积为__（$x^2-15x+54$）__ m^2，休闲区能接的雨水量为__（$-3x^2+45x$）__ L．（用含有 x 的代数式表示）

（2）若种菜区每平方米需要 $6L$ 水，休闲区接的水恰好够灌溉种菜区，求 x 的值．



【分析】（1）根据题意，用含 x 的代数式分别表示出种菜区的面积及休闲区能接的雨水量即可；

（2）根据题意，得出关于 x 的方程，据此进行求解即可．

【解答】解：（1）由题知，

因为 $AD=9m$，$AB=6m$，$BG=DF=xm$，

所以种菜区的面积为：$(9-x)(6-x)=(x^2-15x+54)m^2$，

则休闲区的面积可表示为：$6\times9-(x^2-15x+54)=(-x^2+15x)m^2$．

因为休闲区的储水量为 $3L/m^2$，

所以休闲区能接的雨水量为（$-3x^2+45x$）L．

故答案为：（$x^2-15x+54$），（$-3x^2+45x$）；

（2）由题知，

$-3x^2+45x=6(x^2-15x+54)$，

解得 $x=3$ 或 12．

因为 $x<6$，

所以 $x=3$．

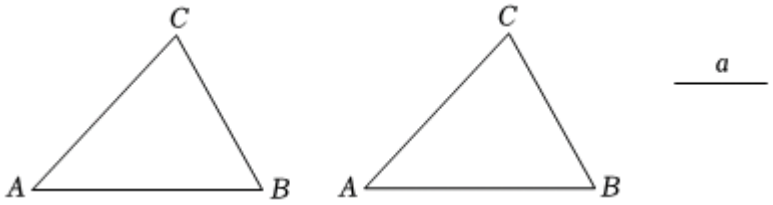
【点评】本题主要考查了列代数式，能根据题意用含 x 的代数式分别表示出种菜区的面积及休闲区能接

的雨水量是解题的关键．

22．已知△ABC，按照以下要求用无刻度的直尺和圆规作图，保留作图痕迹，写出必要的文字说明．

（1）在 AC、BC 上各定一点 E、F，使 $EF/\!/AB$，且 $EF=\frac{1}{2}AB$；

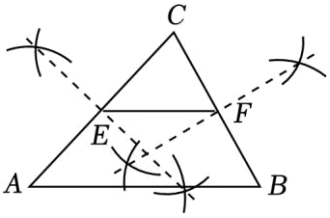
（2）在 AC、BC 上各确定一点 G、P．使 $GP/\!/AB$，且 $GP=a$．



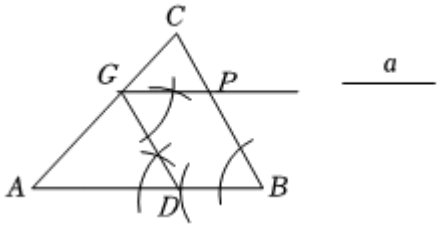
【分析】（1）作出△ABC 的中位线 EF 即可；

（2）构造平行四边形 $BDGP$（$BD=a$）解决问题即可．

【解答】解：（1）如图，线段 EF 即为所求；



（2）如图，线段 GP 即为所求．

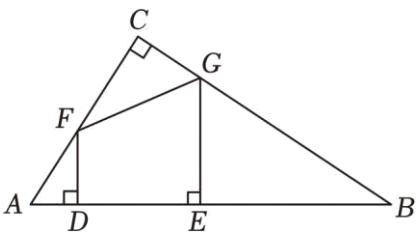


【点评】本题考查作图 - 复杂作图，平行线的性质，平行四边形的判定和性质，解题的关键是掌握相关知识解决问题．

23．已知：Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，F、G 为 AC、BC 边上的点，且 $DF\perp AB$，$EG\perp AB$．

（1）求证：△$ADF\backsim$△GEB；

（2）$\angle B=30°$，$AB=6$，$DE=2$，△$ADF\backsim$△GCF，求 AD 的长．



【分析】（1）由垂直的定义得到$\angle ADF=\angle BEG=90°$，由余角的性质推出$\angle A=\angle BGE$，即可证明△

$ADF\backsim\triangle GEB$；

（2）过 F 作 $FH\perp GE$ 于 H，设 $AD=x$，由 $\tan A=\frac{DF}{AD}=\sqrt{3}$，得到 $DF=\sqrt{3}x$，由 $\tan\angle B=\frac{EG}{EB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得到 $EG=\frac{\sqrt{3}}{3}(4-x)$，判定四边形 $DEHF$ 是矩形，得到 $EH=DF=\sqrt{3}x$，$FH=DE=2$，求出 $GH=\frac{4\sqrt{3}}{3}(1-x)$，由相似三角形的性质推出 $\angle CGF=\angle A=60°$，求出 $\angle FGH=60°$，由 $\tan\angle FGH=\frac{FH}{GH}=\sqrt{3}$，得到 $4(1-x)=2$，求出 $x=\frac{1}{2}$，即可得到 AD 的长．

【解答】（1）证明：$\because DF\perp AB$，$EG\perp AB$，

$\therefore\angle ADF=\angle BEG=90°$，

$\because C=90°$，

$\therefore\angle A+\angle B=\angle BGE+\angle B=90°$，

$\therefore\angle A=\angle BGE$，

$\therefore\triangle ADF\backsim\triangle GEB$；

（2）解：过 F 作 $FH\perp GE$ 于 H，

设 $AD=x$，

$\because AB=6$，$DE=2$，

$\therefore BE=4-x$，

$\because\angle B=30°$，

$\therefore\angle A=90°-30°=60°$，

$\because\tan A=\tan 60°=\frac{DF}{AD}=\sqrt{3}$，

$\therefore DF=\sqrt{3}x$，

$\because\tan\angle B=\tan 30°=\frac{EG}{EB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore EG=\frac{\sqrt{3}}{3}(4-x)$，

$\because\angle FDE=\angle DEH=\angle EHF=90°$，

$\therefore$四边形 $DEHF$ 是矩形，

$\therefore EH=DF=\sqrt{3}x$，$FH=DE=2$，

$\therefore GH=EG-EH=\frac{4\sqrt{3}}{3}(1-x)$，

$\because\triangle ADF\backsim\triangle GCF$，

$\therefore\angle CGF=\angle A=60°$，

∵∠BGE=90°﹣∠B=60°，

∴∠FGH=180°﹣∠CGF﹣∠BGE=60°，

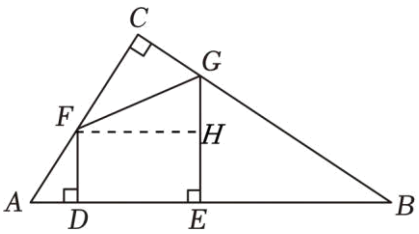
∵tan∠FGH=tan60°=$\frac{FH}{GH}=\sqrt{3}$，

∴$\sqrt{3}GH=FH$，

∴4（1﹣x）=2，

∴$x=\frac{1}{2}$，

∴$AD=\frac{1}{2}$.



【点评】本题考查相似三角形的判定和性质，解直角三角形，矩形的判定和性质，关键是掌握相似三角形的判定方法，由锐角的正切定义得到关于 x 的方程.

24. 如图，有一座抛物线形拱桥，桥的两端分别为点 A、B，顶点为 D，点 C 是 AB 的中点且 $AC=CB=10m$，$CD=10m$. 拱桥右侧远处有一座山，山顶记为点 F，山高为 $331m$，已知山顶 F 到点 A 的水平距离为 $364m$.

（1）请建立适当的直角坐标系，并求出该抛物线形拱桥的函数表达式.

（2）若一人站在拱桥上的点 P 处，且点 P 到点 A 的水平距离为 $2m$，人的眼睛位置为点 Q，点 Q 在点 P 的正上方，且 $PQ=1.6m$，请判断人眼在点 Q 处能否直接看到山顶 F，并说明理由.

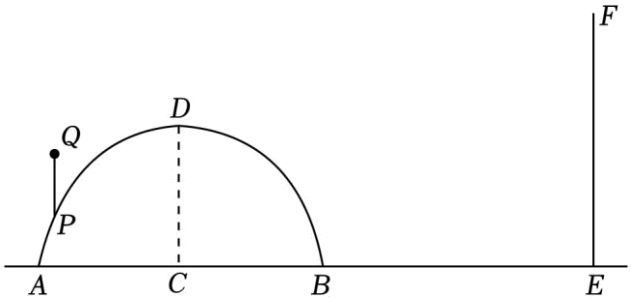
（3）下列结论中，正确的是 ① .

①在挑桥的 AD 段有一个与 P 不重合的 M 点与人在 P 点处看山顶 F 的仰角相等；

②在拱桥的 BD 段有一点 M 与人在 P 点处看山顶 F 的仰角相等；

③人从点 D 走到点 B 的过程中，当人位于点 D 时，眼睛 Q 点到山顶 F 的距离最近；

④人从点 D 走到点 B 的过程中，当人位于点 B 时，眼睛 Q 点到山顶 F 的距离最近.



【分析】（1）建系求函数：以拱底中点 C 为原点，AB 为 x 轴，CD 为 y 轴，设顶点式 $y=ax^2+10$ 代入 A（﹣10，0）得解析式.

（2）判断视线遮挡：求出 Q 和 F 坐标，写出视线直线方程，与抛物线作差，证明差值恒正，即视线在桥面上方.

（3）判断仰角相等点，设 AD 段动点 M（x），写出仰角正切表达式，令其等于 P 点处仰角正切 0.9，解方程得 $x=$﹣1 或﹣8，从而判断①对②错. 判断距离最近点，分别别计算点 D、B 到 F 的距离的平方，比较 $x=5$ 时，对应的点到 F 的距离平方即可判断③④错误.

【解答】解：（1）以点 C 为原点，以 AB 所在直线为 x 轴，以 CD 所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，

则：A（﹣10，0），B（10，0），D（0，10），

因为抛物线顶点为 D（0，10），

设抛物线为：$y=ax^2+10$，

把 A（﹣10，0）代入：$0=a\cdot10^2+10$，

$a=-\frac{1}{10}$，

所以抛物线形拱桥的函数表达式为：$y=-\frac{1}{10}x^2+10$（﹣10≤x≤10）；

（2）由（1）可知点 A 坐标为 （﹣10，0），

且点 P 到点 A 的水平距离为 $2m$，因为 P 在桥上且在 A 的右侧，

所以 P 的横坐标是：$x_P=$﹣10+2=﹣8，将 $x=$﹣8 代入抛物线$y=-\frac{1}{10}x^2+10$，

得：$y_P=-\frac{1}{10}\times64+10=-6.4+10=3.6$，

所以 P（﹣8，3.6），

眼睛 Q 在 P 正上方 $1.6m$，

所以 Q（﹣8，5.2），

点 A（﹣10，0），山顶到点 A 的水平距离为 $364m$（在右侧），

所以 $x_F=$﹣10+364=354，

由于山高 $331m$，

所以 F（354，331），

根据 Q（﹣8，5.2），F（354，331），

可求得直线 QF 方程为：$y=0.9x+12.4$，

设视线高度为 y_1＝0.9x+12.4，

桥面高度为 y_2= $-\frac{1}{10}x^2+10$，

所以 y_1﹣y_2＝（0.9x+12.4）﹣（$-\frac{1}{10}x^2+10$），

h（x）＝0.1x^2+0.9x+2.4，

令 y＝0.1（x^2+9x）+2.4，

配方可得：y＝0.1（x+4.5）^{2}+0.375，

所以 y_1﹣y_2≥0.375＞0，

所以视线 QF 在拱桥范围内的每一个点上，都比拱桥高出至少 0.375m，

即视线完全在拱桥上方，没有任何遮挡．所以，人眼在点 Q 处能直接看到山顶 F；

（3）①设拱桥 AD 段上任意一点 M 的横坐标为 x（﹣10≤x≤0），

由抛物线$y=-\frac{1}{10}x^2+10$，

人站在 M 点，眼睛在正上方 1.6m 处，

所以眼睛坐标为 Q'（x，$-\frac{1}{10}x^2+11.6$）

从点 Q'看山顶 F（354，331），

所以仰角 α 的正切为：$tan\alpha=\frac{331-(-\frac{1}{10}x^2+11.6)}{354-x}=\frac{319.4+0.1x^2}{354-x}$，

由于点 P（﹣8，3.6），眼睛 Q（﹣8，5.2），

从 Q 看山顶 F，其仰角为 β，

所以$tan\beta=\frac{331-5.2}{354-(-8)}=\frac{325.8}{362}=0.9$，

令 tanα＝tanβ，解方程：$\frac{319.4+0.1x^2}{354-x}=0.9$，

化简得：（x+1）（x+8）＝0，

解得：x＝﹣1，或 x＝﹣8，当 x＝﹣8 正好是点 P 的横坐标，

x＝﹣1 在 AD 段内（因为﹣10≤﹣1≤0），且与 P 不重合，

所以确实存在这样一个 M 点（横坐标为﹣1）；

②在拱桥的 BD 段有一点 M 与人在 P 点处看山顶 F 的仰角相等这个结论是错误的，

根据结论①的推导，我们解出的两个使仰角相等的点，

横坐标分别为：x＝﹣8 和 x＝﹣1 这两个点都在 AD 段（即 x≤0 的左侧），

而 BD 段对应的是 $0 \leqslant x \leqslant 10$，

在 BD 段内，没有任何一个 x 能满足上述方程，

所以，拱桥的 BD 段上不存在这样的点；

③用反例说明：

当人位于点 D 时，$x=0$，眼睛坐标为（0，11.6）.

到 F（354，331）的距离平方为：

$d_D^2 = (354-0)^2 + (331-11.6)^2 = 354^2 + 319.4^2$，

此时眼睛坐标为（5，$-\frac{1}{10} \times 25 + 11.6$），即（5，9.1），

到 F 的距离平方为：$d_{x=5}^2$ =（354﹣5）^{2}+（331﹣9.1）^{2}=349^2+321.9^2，

比较$d_D^2 - d_{x=5}^2$ =354^2+319.4^2﹣349^2﹣321.9^2

=（354^2﹣349^2）+（319.4^2﹣321.9^2）

=（354﹣349）（354+349）+（319.4﹣321.9）（319.4+321.9）

=5×703+（﹣2.5）×641.3

=3515﹣1603.25=1911.75＞0，

也就是说，在 $x=5$ 处时，眼睛到山顶的距离比在点 D 处更近，

既然存在比 D 点更近的位置，那么点 D 是最近点的说法就不成立；

④同样用反例说明：当人位于点 B 时，$x=10$，眼睛坐标为（10，1.6），

到 F 的距离平方为：$d_B^2 = (354-10)^2 + (331-1.6)^2 = 344^2 + 329.4^2$

仍然拿 $x=5$ 时的距离来比较：此时眼睛坐标为（5，9.1），

到 F 的距离平方为：$d_{x=5}^2$ =（354﹣5）^{2}+（331﹣9.1）^{2}=349^2+321.9^2，

所以$d_B^2 - d_{x=5}^2$ =344^2+329.4^2﹣349^2﹣321.9^2

=（344^2﹣349^2）+（329.4^2﹣321.9^2）

=（344﹣349）（344+349）+（329.4﹣321.9）（329.4+321.9）

=（﹣5）×693+7.5×651.3

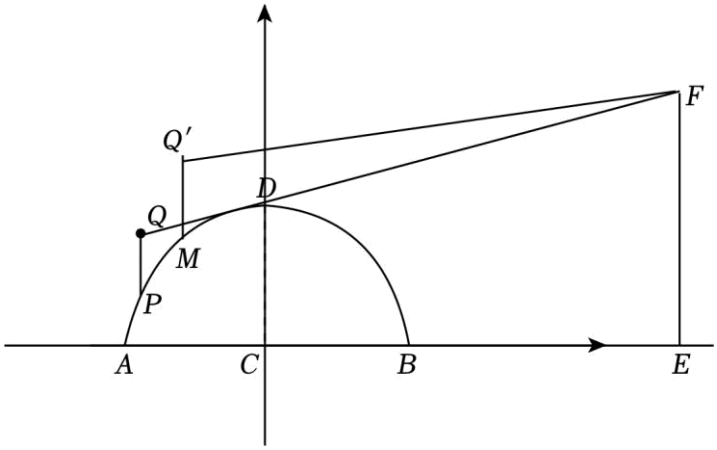
=﹣3465+4884.75

=1419.75＞0，

也就是说，在 $x=5$ 处时，眼睛到山顶的距离比在点 B 处更近，

既然存在比 D 点更近的位置，那么点 D 是最近点的说法就不成立；

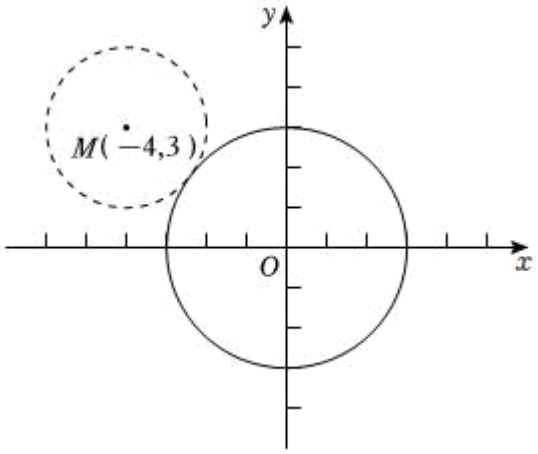
故答案为：①.



【点评】本意主要考查了二次函数建模、一次函数与二次函数的位置比较（视线遮挡）、解直角三角形（仰角正切）以及利用函数思想分析动点最值问题．建立合适的坐标系并准确表示动点坐标，是解题的关键．本题亮点在于将“能否看见”转化为“直线与抛物线是否相交”的代数判断，将仰角相等转化为方程求解，将 距离最近转化为特殊值计算，体现了数形结合和转化思想．对初中生而言计算量稍大，但对巩固二次函数应用能力很有价值．

25．背景材料：模拟“月食”变化

已知圆 O 的圆心为 O（0，0），半径为 3，另有一圆 M，半径为 2．当 $t=0$ 时，圆 M 的圆心为（﹣4，3），圆 M 以每分钟 1 个单位长度的速度沿着 x 轴正方向运动，在运动过程中，将圆 M 中未被圆 O 覆盖的部分称为“亮面”，当亮面再次变为一个完整的圆时，圆 M 停止运动，示意图如图所示：



（1）判断下面命题是否正确，并说明理由．

①亮面始终为轴对称图形；

②当 $t=8$ 时，亮面再次为完整的圆；

③在整个运动过程中，亮面的面积始终不小于圆 M 面积的$\frac{2}{3}$；

（2）画出亮面面积 S 关于运动时间 t 的大致图象，并简述理由．

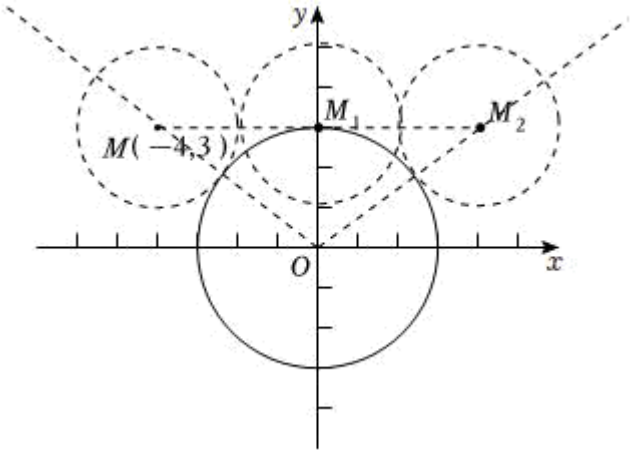
【分析】（1）①根据圆的对称性即可得解；

②当 $t=8$ 时，圆 M 与初始位置对称，此时亮面再次为完整的圆；

③由圆 M 的运动轨迹可知，当圆 M 运动到圆 M_1 时，此时重叠部分面积最大，则亮面的面积最小，如图，设两圆交于点 E、F，连接 EF，交 y 轴于点 G，连接 OE，双勾股求出 MG，可得 $\angle EMG$ 与 60° 的大小关系，即可得解；

（2）根据对称性找到最高点和最低点，找出对称轴，即可画出大致图象.

【解答】解：（1）圆 M 的运动轨迹如图，



则 M_1（0，3），M_2（4，3），

①两圆相交，相交部分或非相交部分均为轴对称图形，

则亮面始终为轴对称图形，且过 O、M 的直线为对称轴；

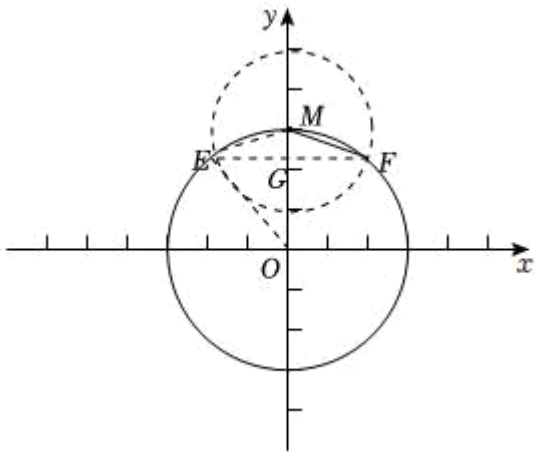
故①正确，符合题意；

②当 $t=8$ 时，圆 M 运动到圆 M_2 的位置，

此时与初始位置对称，此时亮面再次为完整的圆；

故②正确，符合题意；

③由圆 M 的运动轨迹可知，当圆 M 运动到圆 M_1 时，此时重叠部分面积最大，则亮面的面积最小，如图，设两圆交于点 E、F，连接 EF，交 y 轴于点 G，连接 OE，



则 OM 垂直平分 EF，

当 M（﹣4，3）时，圆 M 与圆 O 相切，

∴此时 $OM=5$，

∴圆 M 的半径为 2，

设 $MG=x$，则 $OG=3-x$，

在 Rt△EMG 中，$EG^2=ME^2-MG^2=2^2-x^2$，

在 Rt△EOG 中，$EG^2=OE^2-OG^2=3^2-(3-x)^2=6x-x^2$，

∴$2^2-x^2=6x-x^2$，

解得 $x=\frac{2}{3}$，即 $MG=\frac{2}{3}$，

∴$\cos\angle EMG=\frac{MG}{ME}=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$，

∵$\cos 60°=\frac{1}{2}$，且$\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$，

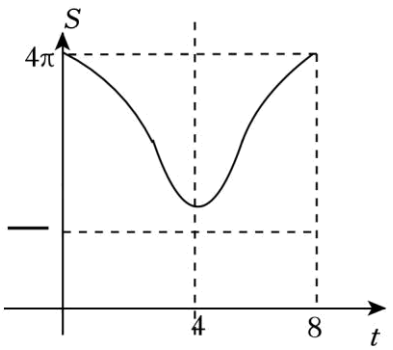
∴$\angle EMG>60°$，则$\angle EMF>120°$，

∴亮面的圆心角则小于 240°，

此时亮面的面积小于圆 M 面积的$\frac{2}{3}$；

故③错误，不符合题意；

（2）亮面面积 S 关于运动时间 t 的大致图象如图，



理由：①由第一问可知当 $t=0$ 和 $t=8$ 时，亮面为完整的圆，即圆 M 的面积，

∴$S_{最大}=\pi r^2=4\pi$，

②由对称性可知对称轴为直线 $t=4$，

同时由（1）③可知此时 S 最小值.

【点评】本题主要考查了圆和圆位置关系、勾股定理、垂径定理、函数图象等内容，熟练掌握相关知识是解题的关键.